Integration durch Substitution

Beispiel: Berechnung des Integrals $\int_{-3}^{4} \frac{-2x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$

Substitution: $z = \varphi(x) = 25 - x^2$

Neue Grenzen für z: $x = -3 \Rightarrow z = 16$
$x = 4 \quad \Rightarrow z = 9$

$z' = \varphi'(x) = \frac{dz}{dx} = -2x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dz}{-2x} = \frac{dz}{\varphi'(x)}$

Damit erhält man als neues Integral:

$$\int_{16}^{9} \frac{-2x}{\sqrt{z}} \cdot \frac{dz}{-2x} = \int_{16}^{9} \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = \left[2 \cdot \sqrt{z}\right]_{16}^{9} = 6 - 8 = -2$$

Verallgemeinerung:
Dieses Verfahren funktioniert immer dann sehr gut und schnell, wenn man die Substitutionsfunktion $z = \varphi(x)$ so wählen kann, dass man ein Integral der folgenden Form vorliegen hat: $\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx$
Der Grund dafür liegt darin, dass sich nach der Substitution von dx der Term φ'(x) aus dem Integranden herauskürzt.
Im obigen Beispiel wäre $f(z) = f(\varphi(x)) = \frac{1}{\sqrt{z}}$
Im Allgemeinen gilt dann $\boldsymbol{\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)dz}$

Bemerkung: Im obigen Beispiel ist die Substitutionsfunktion φ im gewählten Intervall [-3; 4] nicht umkehrbar. Trotzdem funktioniert das Verfahren!

Wenn man die Substitutionsfunktion φ so wählen kann, wie gerade beschrieben, dann ist andererseits der Integrand auch so einfach, dass man seine Stammfunktion (bei einiger Übung) nach kurzer Überlegung auch schon „sehen“ kann. Für das obige Beispiel gilt dann offensichtlich:

$$\int_{-3}^{4} \frac{-2x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx = \left[2 \cdot \sqrt{25 - x^2}\right]_{-3}^{4} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = -2$$

Eine Rechnung mit Substitution kann man sich dann auch ersparen.

Bemerkung:
Dieses Verfahren funktioniert immer (vorausgesetzt, das Integral ist überhaupt berechenbar), wenn nach der Substitution (und eventueller Zusammenfassung) im Integranden kein Term mit der Variablen x mehr steht. Falls doch, muss man die Variable x mit Hilfe der Umkehrfunktion von φ durch einen Ausdruck mit z ersetzen. Das setzt dann allerdings voraus, dass φ umkehrbar ist. Notfalls müsste man das gesamte Integrationsintervall in mehrere kleinere Intervalle aufspalten.

Es gibt oft mehrere Möglichkeiten, die Substitutionsfunktion $z = \varphi(x)$ zu wählen. Welche der verschiedenen Möglichkeiten am günstigsten ist, kann man vorher nicht unbedingt erkennen. Es gibt leider auch Substitutionen, welche nicht zum Ziel führen. Auch das ist oft vorher nicht absehbar. Im Folgenden wird ein Integral mit zwei verschiedenen Substitutionen gelöst.

Berechne das bestimmte Integral $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

Substitution: $z = \sqrt{x-1} \quad \Rightarrow \quad x = z^2 + 1$

Grenzen: $x = 2 \;\Rightarrow\; z = 1$
$x = 5 \;\Rightarrow\; z = 2$

$$z'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad dx = 2\sqrt{x-1}dz = 2z\,dz$$

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{z} \cdot 2z\,dz = 2 \cdot \int_1^2 1dz = 2 \cdot [z]_1^2 = 2 \cdot (2-1) = 2$$

Dieses Integral wäre auch mit einer anderen Substitution zu lösen gewesen:
$z = x - 1$

Grenzen: $x = 2 \;\Rightarrow\; z = 1$
$x = 5 \;\Rightarrow\; z = 4$

$$z'(x) = \frac{dz}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad dx = dz$$

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{z}}dz = \left[2\sqrt{z}\right]_1^4 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2$$

Im Folgenden wird ein Beispiel gezeigt, in dem die Substitution zusammen mit „unvorsichtiger“ Rechnung ein falsches Ergebnis liefert. Das liegt daran, dass die Substitution $z = \varphi(x)$ für das entsprechende Intervall nicht umkehrbar ist, und dass nach der Substitution noch nicht alle Terme mit der Variablen x aus dem Integranden verschwunden sind.

Berechne etwa das Integral $\int_{-1}^{1} x^2\,dx$ durch Substitution!
Natürlich benötigt man für dieses simple Integral keine Substitution, denn man kann es ja schnell berechnen: $\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Wir wenden trotzdem die Substitutionsmethode an:
Substitution: $z = \varphi(x) = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{z}$ Das Vorzeichen ist hier nicht eindeutig! **Die Substitutionsfunktion φ ist zwischen x = –1 und x = 1 nicht umkehrbar!**

Grenzen: $x = -1 \Rightarrow z = 1$ und $x = 1 \Rightarrow z = 1$
Hier möchte man aufgrund der identischen Grenzen für z schon den Wert 0 als Ergebnis angeben: $\int_{1}^{1} \dots dz = 0$
Aber so einfach ist die Sache nicht! Etwas ausführlicher folgt nämlich das Integral $\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \int_{1}^{1} z\frac{dz}{2x}$
Bei dem letzten Integral beziehen sich die Grenzen auf die Variable z. Aber für die Variable x gilt: $-1 \le x \le 1$. Insbesondere kann auch x = 0 sein. Und wie man im letzten Integral sieht, steht x im Nenner! So kann man also nicht rechnen!

Und x lässt sich in seinen Grenzen nicht eindeutig durch einen Term mit z ausdrücken, weil $z = \varphi(x)$ eben nicht umkehrbar ist!

Man müsste das Integral aufteilen in 2 Teilintegrale, innerhalb derer Grenzen die Substitutionsfunktion $\varphi(x)$ jeweils umkehrbar ist:
$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \int_{-1}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx$

Für beide Integrale wird dieselbe Substitution gewählt: $z = \varphi(x) = x^2$
Allerdings gibt es unterschiedliche Resubstitutionen: Für das erste Teilintervall gilt $x = -\sqrt{z}$, für das zweite gilt $x = +\sqrt{z}$
Umrechnung der Grenzen: $x=-1 \Longrightarrow z=1$, $x=0 \Longrightarrow z=0$, $x=1 \Longrightarrow z=1$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \int_{x=-1}^{x=0} z\frac{dz}{2x} + \int_{x=0}^{x=1} z\frac{dz}{2x} = \int_{1}^{0} z\frac{dz}{2\cdot(-\sqrt{z})} + \int_{0}^{1} z\frac{dz}{2\sqrt{z}}$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{1}^{0}\sqrt{z}\,dz + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\sqrt{z}\,dz = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}z^{1,5}\right]_{1}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}z^{1,5}\right]_{0}^{1}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - 0\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Die Substitutionsmethode wird oft auch eingesetzt, wenn man nur eine Stammfunktion sucht. Dabei erspart man sich das Umrechnen von Integrationsgrenzen.
Das Verfahren läuft ansonsten genauso wie die Berechnung von bestimmten Integralen mit Hilfe der Substitution. Im nächsten Beispiel wird dies deutlich:

Berechne das unbestimmte Integral $\int x \cdot e^{-x^2}\, dx$

Substitution $z = \varphi(x) = x^2$
Daraus folgt: $\frac{dz}{dx} = 2x \Longrightarrow dx = \frac{1}{2x} \cdot dz$

Weiterhin folgt:
$\int x \cdot e^{-x^2}\, dx = \int x \cdot e^{-z} \cdot \frac{1}{2x} dz = \frac{1}{2} \cdot \int e^{-z}\, dz = -\frac{1}{2} \cdot e^{-z} + C$

Da eine Stammfunktion für die Variable x benötigt wird, muss man jetzt noch resubstituieren: $\int x \cdot e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$

Es wurde bereits erwähnt, dass man oft nicht ersehen kann, wie man am besten substituieren sollte. Oft muss man mehrere Möglichkeiten ausprobieren, bevor man zum Ziel kommt.
Manche Substitutionen kann man fast schon als genial bezeichnen, wie das folgende Beispiel zeigt:

Gesucht ist das unbestimmte Integral $\int \sqrt{1-x^2} dx$

Substitution: $x = \sin z$
Bemerkung: Natürlich hätte man genauso gut $z = arc \sin x$ formulieren können, aber unsere Wahl erleichtert etwas die weiter folgende Rechnung.

Damit folgt: $\frac{dx}{dz} = \cos z \;\Rightarrow dx = \cos z\, dz$

$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1 - sin^2 z} \cdot \cos z\, dz$
$= \int \cos^2 z\, dz$ Dieses Integral sollte bekannt sein:
$= \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} \sin z \cdot \cos z + C$
$= \frac{1}{2} arc \sin x + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{1-x^2} + C$