# <u>**Substitutionsregel**</u>

Beispiel : Berechnung des Integrals $\int_3^4 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}dx$

$z = 25 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x = +\sqrt{25 - z} \quad$ positiv, weil $3 \le x \le 4$

Neue Grenzen für z : $\quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad z = 16$

$\quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad z = 9$

$$\frac{dz}{dx} = -2x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dz}{-2x}$$

Damit erhält man als neues Integral:

$$\int_{16}^{9} \frac{x}{\sqrt{z}} \cdot \frac{dz}{-2x} \quad = \quad -\int_{16}^{9} \frac{1}{2\sqrt{z}}dz \quad = \quad \left[\sqrt{z}\right]_9^{16} \quad = \quad 4 - 3 = 1$$

Dieses Verfahren funktioniert immer unter der Voraussetzung, dass die Substitutionsfunktion $z = .....$ **<u>in dem betreffenden Intervall für x</u>** umkehrbar ist. (Selbstverständlich muss sie auch differenzierbar sein).

Es gibt sehr oft mehrere Möglichkeiten, die Substitutionsfunktion $z = ...$ zu wählen. Welche der verschiedenen Möglichkeiten am günstigsten ist, kann man normalerweise vorher nicht erkennen. Es gibt leider auch Substitutionen, welche nicht zum Ziel führen. Auch das ist meistens vorher nicht absehbar. Im Folgenden wird ein Integral mit zwei verschiedenen Substitutionen gelöst.

Berechne das bestimmte Integral $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

Substitution: $z = \sqrt{x-1} \quad \Rightarrow \quad x = z^2 + 1$

Grenzen: $x = 2 \;\Rightarrow\; z = 1$

$x = 5 \;\Rightarrow\; z = 2$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad dx = 2\sqrt{x-1}\,dz = 2z\,dz$$

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{z} \cdot 2z\,dz = 2\int_1^2 dz = 2 \cdot [z]_1^2 = 2 \cdot (2-1) = 2$$

Dieses Integral wäre auch mit einer anderen Substitution zu lösen gewesen: $z = x - 1$

Grenzen: $x = 5 \;\Rightarrow\; z = 4$

$x = 2 \;\Rightarrow\; z = 1$

$$\frac{dz}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad dx = dz$$

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = \left[2\sqrt{z}\right]_1^4 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2$$

Im Folgenden werden Beispiele gezeigt, in denen die Substitution zu falschen Ergebnissen führt. Das liegt immer daran, dass die Substitution für das entsprechende Intervall nicht umkehrbar ist. **Das hat nichts mit der Umkehrbarkeit der zu integrierenden Funktion f zu tun!**

Berechne etwa das Integral $\int_{-1}^{1} x^2\, dx$ durch Substitution!
Natürlich benötigt man für dieses simple Integral keine Substitution, denn man kann es ja schnell berechnen: $\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Wir wenden trotzdem die Substitutionsmethode an:
Substitution: $z = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{z}$ Das Vorzeichen ist hier nicht eindeutig!

Grenzen: $x = -1 \Rightarrow z = 1$ und $x = 1 \Rightarrow z = 1$
Hier erkennt man schon, dass das neue Integral den Wert 0 ergibt.

$$\frac{dz}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} \cdot dz$$

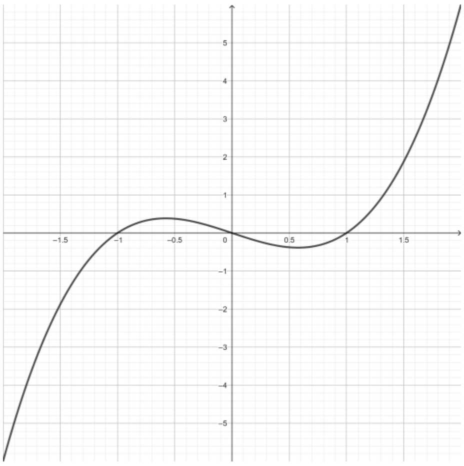
$$\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \int_{1}^{1} z\, \frac{1}{2x} \cdot dz = \int_{1}^{1} z\, \frac{1}{\pm 2\sqrt{z}} \cdot dz = \pm \int_{1}^{1} \frac{1}{2}\sqrt{z}\, dz = 0$$

In dem obigen Beispiel konnte man bei der Berechnung der neuen Grenzen bei einiger Aufmerksamkeit sofort erkennen, dass das Ergebnis falsch werden musste.
Das muss nicht immer so einfach zu erkennen sein!

(Übrigens: für das Intervall $0 \leq x \leq 1$ würde obige Substitution zum richtigen Ergebnis führen. Aber in diesem Intervall ist obige Substitution auch umkehrbar!)

Betrachte noch ein weiteres Beispiel, in welchem die Umkehrbarkeit der Substitutionsfunktion eine wichtige Rolle spielt:

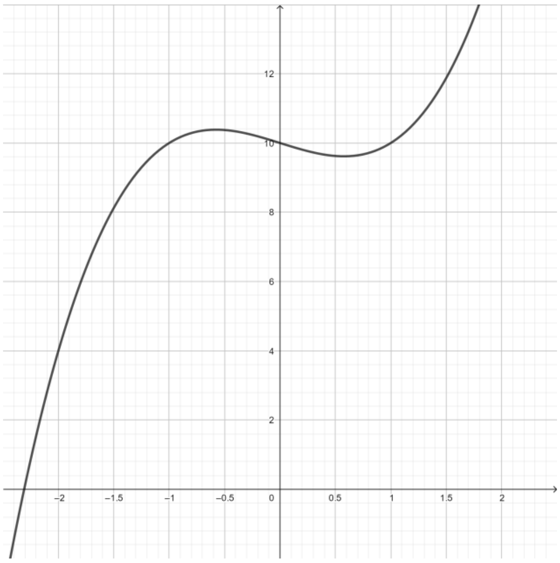
Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x+1)x(x-1)$




Der Funktionsgraph ist symmetrisch und das Integral der Funktion von -1 bis +1 muss Null ergeben.

Eine (falsche, weil nicht umkehrbare) Substitution $z = x^2-1$ führt zu den neuen Grenzen 0 und 0.

Das Integral über z führt also in diesem Beispiel trotz falscher Substitution zum richtigen Ergebnis.

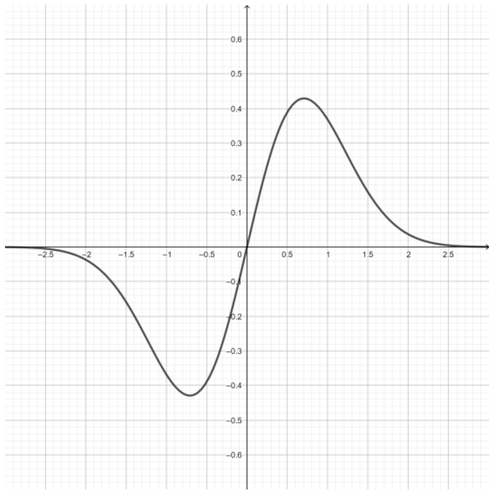



Betrachten wir nun die nach oben verschobene Funktion $g(x) = (x+1)x(x-1) + 10$

Das Integral der Funktion g von -1 bis +1 ist sicherlich positiv. Man könnte es ja leicht ausrechnen. Aber die Substitution $z = x^2-1$ führt wieder zu den neuen Grenzen 0 und 0. Das mit Hilfe von z berechnete Integral würde also wieder 0 ergeben und damit falsch sein.

Die Problematik bei der Substitutionsmethode besteht also immer in der Umkehrbarkeit der Substitution. Dieses Problem kann man aber bei (fast) allen Funktionen umgehen, indem man **zunächst** keine bestimmten Integrale mit bestimmten Grenzen löst (weil innerhalb dieser Grenzen die Substitution eventuell nicht umkehrbar wäre), sondern unbestimmte Integrale löst. Man substituiert z = … , löst das neue Integral und resubstituiert anschließend wieder nach x.

Im nächsten Beispiel wird dies deutlich:



Berechne das Integral $\int_{-1}^{2} x \cdot e^{-x^2}\, dx$

Substituiere etwa $z = x^2$

Mit den angegebenen Grenzen würde es damit aber Probleme geben, weil x im Intervall [-1; 2] sowohl positiv als auch negativ sein kann. Eine Resubstitution wäre praktisch nicht möglich, weil aus einem positiven Wert von z keine Rückschlüsse über das Vorzeichen von x gezogen werden können.

Andererseits wäre aber das Integral $\int_{1}^{2} x \cdot e^{-x^2}\, dx$ völlig unproblematisch, weil x hier nur positiv ist.

Man berechnet deshalb zunächst das unbestimmte Integral $\int x \cdot e^{-x^2}\, dx$

Substitution $z = x^2$

Daraus folgt: $\frac{dz}{dx} = 2x \Longrightarrow dx = \frac{1}{2x} \cdot dz$

Weiterhin folgt:

$$\int x \cdot e^{-x^2}\, dx = \int x \cdot e^{-z} \cdot \frac{1}{2x} dz = \frac{1}{2} \cdot \int e^{-z}\, dz = -\frac{1}{2} \cdot e^{-z} + C$$

Da eine Stammfunktion für die Variable x benötigt wird, muss man jetzt noch resubstituieren: $\int x \cdot e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$

Nun können wir auch wieder die Grenzen einsetzen und es folgt:

$$\int_{-1}^{2} x \cdot e^{-x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_{-1}^{2} = -\frac{1}{2} \cdot e^{-4} + \frac{1}{2} \cdot e^{-1} \approx 0{,}17$$

Dieses Verfahren mit der Resubstitution funktioniert für alle üblichen Funktionen (fast) immer. Der Grund dafür liegt darin, dass es immer ein (vielleicht kleines) Intervall gibt, in dem die vorgenommene Substitution z = … umkehrbar ist. Für dieses Intervall **muss** die Substitutionsmethode funktionieren.

Für dieses Intervall findet man also, wie oben beschrieben (durch Substitution und Resubstitution), eine Stammfunktion. Die Stammfunktion ist aber für den gesamten Definitionsbereich der Funktion dieselbe.

Aus mathematischen Sicherheitsgründen wäre es also zu empfehlen, grundsätzlich erst unbestimmte Integrale mit Hilfe von Substitution und Resubstitution zu berechnen.

Es wurde bereits erwähnt, dass es keine Regeln gibt, anhand derer man ersehen kann, wie man am besten substituieren sollte. Oft muss man mehrere Möglichkeiten ausprobieren, bevor man zum Ziel kommt. Manche Substitutionen kann man fast schon als genial bezeichnen, wie das folgende Beispiel zeigt:

Gesucht ist das unbestimmte Integral $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Substitution: $\mathrm{x} = \sin z$

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dz}} = \cos z \quad \Rightarrow \quad \mathrm{dx} = \cos z \,\mathrm{dz}$ Man sieht, es geht auch anders herum!

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 z}\cdot \cos z\, dz \\
&= \int \cos^2 z\, dz \qquad \text{Dieses Integral sollte bekannt sein.} \\
&= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sin z \cos z + C \\
&= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{1-x^2} + \mathrm{C}
\end{aligned}$$