

Lösung

Ein Bauer möchte zu sehr günstigen Preisen Kleinvieh kaufen; insgesamt 100 Tiere.
Genauer: Er kauft z Ziegen für 10€ pro Ziege, h Hasen für 3€ pro Hase und e Enten für $\frac{1}{2}$ € pro Ente. Er bezahlt für die 100 lebenden Tiere insgesamt genau 100 €.
Wie viele Ziegen, Hasen und Enten hat der Bauer gekauft?

Es gelten offensichtlich folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned}z + h + e &= 100 \\z \cdot 10 + h \cdot 3 + e \cdot \frac{1}{2} &= 100\end{aligned}$$

Normalerweise lässt sich ein Gleichungssystem mit 3 Variablen z , h und e nicht durch bloße 2 Gleichungen lösen. Aber in diesem Fall kommt hinzu, dass die 3 Variablen alle natürliche Zahlen (eventuell auch 0) sein müssen. Das hilft weiter.

Etwas umgeschrieben folgt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\text{I. } 10z + 3h + \frac{1}{2}e &= 100 \\ \text{II. } z + h + e &= 100\end{aligned}$$

Um die Variable e zu eliminieren, multipliziert man die Gleichung I mit dem Faktor 2 und subtrahiert anschließend die Gleichung II:

$$\text{III. } 19z + 5h = 100$$

Aus dieser Gleichung folgt schon mal: Wenn der Bauer Ziegen kaufen würde, dann müsste deren Anzahl z kleiner als 6 sein (denn sonst wäre der Preis schon über 100€).
Analog: Wenn der Bauer Hasen kaufen würde, so müsste deren Anzahl kleiner gleich 20 sein.

Stellt man die Gleichung III etwas um, so folgt: $5h = 100 - 19z$

Das bedeutet: Die rechte Seite dieser Gleichung muss durch 5 teilbar sein. Das ist aber nur möglich (weil $0 \leq z < 6$), wenn (Fall 1) $z = 0$ oder (Fall 2) $z = 5$ ist.

Damit folgt aber sofort aus der letzten Gleichung: $5h = 100 - 19z$

Fall 1 ($z = 0$): $h = 20$ oder Fall 2 ($z = 5$): $h = 1$

Der Bauer kauft also entweder 0 Ziegen, 20 Hasen und demzufolge 80 Enten oder 5 Ziegen, 1 Hase und 94 Enten.