Inhaltsverzeichnis

Gruppentheorie

Unter „Rechnen" versteht man zunächst die Anwendung der vier Grundrechenarten Addition (+), Subtraktion (–), Multiplikation (·) und Division (:). Und diese Grundrechenarten beziehen sich alle auf die üblichen Zahlenmengen: Zuerst auf die natürlichen Zahlen N, später auf die ganzen Zahlen Z, auf die rationalen Zahlen Q und auf die reellen Zahlen $\mathcal{R}$.

Aber schon in der Schulzeit (in der gymnasialen Oberstufe) erkennt man, dass man nicht nur mit diesen bekannten Zahlen, sondern auch mit neuartigen Gebilden rechnen muss, z.B. mit dreidimensionalen Vektoren:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

Oder etwa mit Matrizen: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 0 & 3\\1 & 2 & 2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\4 & 0 & 2\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11 & 0 & 5\\6 & 3 & 5\\11 & 2 & 7\end{pmatrix}$

In der gymnasialen Oberstufe werden auch schon Rechenoperationen mit Funktionen ausgeführt: Gegeben seien z.B. die beiden reellen Funktionen f und g durch $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = 3x - 2$. Als Rechenoperation auf der Menge aller solcher Funktionen wählt man die sog. Hintereinanderausführung und als Rechenzeichen das Zeichen „$\circ$". Dann folgt: $f \circ g$ ist diejenige Funktion h, für die gilt:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x-2) = (3x-2)^2 + 1 = 9x^2 - 12x + 5$$

Die Funktion j sei diejenige Funktion, für die gilt:

$$j(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = 3(x^2+1) - 2 = 3x^2 + 1$$

Also ist das Kommutativgesetz für diese Funktionenoperation nicht erfüllt, denn offensichtlich gilt: $f \circ g \neq g \circ f$

Viele dieser Mengen und Rechenoperationen haben bestimmte Eigenschaften gemeinsam. Es gelten ähnliche Rechengesetze wie bei den vier Grundrechenarten. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, eine solche Menge als abstrakte Grundmenge anzunehmen (ohne sich darüber festzulegen, um welche Art von Elementen es sich handelt), auf der man mit einer ebenso abstrakten Rechenoperation herumrechnet. Dabei gewinnt man Erkenntnisse, die sich verallgemeinern lassen.

Die in den obigen Beispielen beschriebenen Rechenoperationen kann man alle als sog. *Verknüpfung* von jeweils zwei Elementen interpretieren: Zwei Elemente werden *verknüpft* und als Ergebnis erhält man ein weiteres Element dieser Menge.

Beispiele: $8 + 4 = 12$; $f \circ g = h$; Vektor1 × Vektor2 = Vektor3 usw.

Hinweis: im Folgenden werden immer wieder mal die beiden mathematischen Quantoren $\forall$ und $\exists$ benutzt. Der Allquantor $\forall$ bedeutet „für alle", der Existenzquantor $\exists$ bedeutet „es existiert (mindestens) ein".

Definition:

Sei G eine beliebige Menge mit beliebigen Elementen und „*" eine beliebige Verknüpfung jeweils zweier Elemente von G miteinander. Dann gilt: Die Menge G bildet zusammen mit der Verknüpfung „*" eine *Gruppe* (G, *), genau dann, wenn folgende Bedingungen (Axiome) erfüllt sind:

- **(G, *) ist *abgeschlossen*, d.h.** $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G}$ **ist auch** $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G}$

- **Die Verknüpfung ist *assoziativ*:**

  $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}) \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{G}$

- **Es gibt ein *neutrales Element* e in G, so dass**

  $\boldsymbol{e} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} * \boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{G}$

- **Zu jedem Element x in G gibt es ein *inverses Element* x^{-1} in G, so dass gilt:** $\boldsymbol{x}^{-1} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} * \boldsymbol{x}^{-1} = \boldsymbol{e} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{G}$

Die beiden letzten Sätze haben folgenden, oft arbeitserleichternden Vorteil: Falls man z.B. durch Ausprobieren ein neutrales Element erraten hat, so ist gesichert, dass man <u>das</u> neutrale Element gefunden hat. Gleiches gilt für das inverse Element.

Aufgaben zum Rechnen in einer Gruppe

Gegeben sei eine Gruppe (G, *), welche nicht unbedingt kommutativ ist.

1. Vereinfache die folgenden Terme, falls möglich:
$a * (a^{-1} * b)$, $a * b * b^{-1} * a^{-1}$, $a * b * c^{-1} * c * b^{-1}$, $a * a * b$

2. Löse die Gleichungen jeweils nach x hin auf! Beachte, dass in einer nichtkommutativen Gruppe normalerweise $a*x \neq x*a$ gilt!
$a*x=b$, $x*b=a$, $x*a*b=b$, $a*x*b=a$, $a^{-1}*x*a=b$

3. Beweise: Aus $a*x = b*x$ folgt, dass $a = b$

4. Beweise: $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

5. Vereinfache für eine kommutative Gruppe den Term
$a * b^{-1} * c * c * a * b * a * c^{-1} * a^{-1} * c^{-1}$

6. Welche der Axiome einer kommutativen Gruppe werden durch die Verknüpfung $\odot$ mit $a \odot b = \frac{a+b}{1+a \cdot b}$ mit $a, b \in \mathcal{R}$ erfüllt?

Berechne x so, dass $2 \odot x \odot x = 7$ gilt!

Lösungen

1. $a * (a^{-1} * b) = (a * a^{-1}) * b = e * b = b$
$a * b * b^{-1} * a^{-1} = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e$
$a * b * c^{-1} * c * b^{-1} = a * b * e * b^{-1} = a * b * b^{-1} = a$
$a * a * b$ das ist nicht vereinfachbar.

Verknüpfungstafeln

Falls eine Gruppe nur sehr wenige Elemente besitzt, wird häufig die Verknüpfung in Form einer Tabelle angeben. Betrachte das folgende Beispiel. Gegeben sei die Menge G = {a, b, c, d} und die Verknüpfung * werde folgendermaßen festgelegt:

*	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

Oben links steht das gewählte Verknüpfungszeichen. Daneben und darunter stehen die einzelnen Elemente der Menge, natürlich in derselben Reihenfolge. Man erkennt hier zum Beispiel, dass $a * b = d$.

Die Abgeschlossenheit sieht man selbstverständlich auf einen Blick.

Ein neutrales Element lässt sich leicht finden: Die zugehörigen Tabelleneinträge in der Zeile rechts daneben müssen mit der Reihenfolge in der obersten Überschriftenzeile identisch sein. Das Analoge gilt für die Tabelleneinträge in der Spalte unter dem neutralen Element. Diese Spalte muss identisch sein mit der Spalte am linken Tabellenrand. Das neutrale Element in obiger Verknüpfung kann also nur das Element c sein.

Üblicherweise schreibt man allerdings das neutrale Element in der Reihenfolge als erstes auf, sodass die erste Zeile und die erste Spalte zu den Verknüpfungen mit dem neutralen Element gehören.

Des Weiteren lässt sich eine eventuell vorhandene Kommutativität an der Symmetrie zur Hauptdiagonalen (von oben links nach unten rechts) erkennen.

Probleme macht allerdings die Assoziativität. Bei einer vierelementigen Menge müsste man $4^3=64$ Möglichkeiten untersuchen. Meistens beschränkt man sich deshalb auf nur wenige Beispiele, was natürlich nicht mathematisch korrekt wäre.

Aufgaben

1. Nur eine der vier folgenden Verknüpfungstafeln stellt eine Gruppe dar. Bestimme diese Gruppentafel und begründe, warum die anderen keine Gruppentafeln darstellen!

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	d	d

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	b	d
d	d	c	d	a

*	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	d	e	c
b	b	e	c	d	a
c	c	d	e	a	b
d	d	c	a	b	e

*	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	d	f	c
b	b	e	a	f	c	d
c	c	f	d	e	b	a
d	d	c	f	a	e	b
f	f	d	c	b	a	e

2. Vervollständige die nebenstehende Tafel, so dass eine Gruppentafel entsteht! Ist diese Gruppe kommutativ?

*	a	b	c	d
a		d	a	
b			b	c
c		b		d
d				

3. Diese Verknüpfungstafel rechts stellt keine Gruppe dar.
Zeige, dass dieses Gebilde abgeschlossen ist, das Kommutativgesetz erfüllt ist und dass es ein neutrales Element enthält und alle Elemente invertierbar sind. Demzufolge muss das Assoziativgesetz verletzt sein. Gib ein entsprechendes Beispiel dafür an!

$\odot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	3	1
3	3	3	1	3
4	4	1	3	2

Quadratische Matrizen

Matrizen werden in derart vielen technischen und naturwissenschaftlichen Gebieten angewandt, dass Studenten der entsprechenden Fachrichtungen schon in den ersten Wochen ihres Studiums mit Matrizen rechnen müssen. Welch genaue Bedeutung eine Matrix und ihre Eigenschaften (Determinante, Eigenwerte, Eigenvektoren usw.) konkret besitzen, das hängt wesentlich vom Einsatzgebiet der Matrizen ab.

Über Matrizen kann man problemlos mehrere dicke Bücher schreiben ohne sich wiederholen zu müssen. Hier in diesem kleinen Büchlein wird demzufolge nur eine Einführung in die grundlegenden Eigenschaften einiger besonderer Matrizen vorgeführt. Die Addition und Multiplikation von quadratischen Matrizen sollte eigentlich vom Schulunterricht her bekannt sein.

Das folgende Beispiel zeigt eine typische (3,3)-Matrix, bestehend aus 3 Zeilen und 3 Spalten: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Elemente dieser Matrix werden auch Koeffizienten genannt. Das Element in der zweiten Zeile und dritten Spalte wird als a_{23} bezeichnet. In diesem Beispiel wäre $a_{23} = -1$.

Wir werden uns hier nur mit quadratischen Matrizen befassen. Bei diesen ist die Anzahl der Zeilen identisch mit der Anzahl der Spalten. Die Koeffizienten unserer quadratischen Matrizen werden in diesem Heft fast ausnahmslos reelle Zahlen sein.

Unter der sog. ***Spur*** einer Matrix A versteht man die Summe der Elemente in der Hauptdiagonalen. Im obigen Beispiel gilt: Sp(A) = 7 .

Unter dem sog. ***Rang*** einer Matrix versteht man die maximale Anzahl ihrer linear unabhängigen Spaltenvektoren. Im obigen Beispiel besitzt die Matrix A die drei Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Diese drei Vektoren sind alle voneinander linear unabhängig. Also hat der Rang der Matrix A den Wert R(A)=3.

Orthogonale Matrizen

Eine **orthogonale Matrix** ist eine quadratische, reelle Matrix, deren Spaltenvektoren zueinander orthonormal sind und deren Zeilenvektoren ebenfalls zueinander orthonormal sind. Das bedeutet, dass für das übliche Skalarprodukt zweier Spaltenvektoren $\vec{s}_j$ und $\vec{s}_k$ gilt:

$\vec{s}_j \cdot \vec{s}_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ falls } j = k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$ Das Analoge gilt für die Zeilenvektoren.

Dabei wird $\boldsymbol{\delta_{jk}}$ als ***Kronecker-Symbol*** bezeichnet.

Leopold Kronecker (1823 - 1891) war ein deutscher Mathematiker.

Beispiel: Die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ -0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ sind jeweils orthogonale Matrizen.

Wir werden später noch zeigen, dass durch Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix Q Vektoren gedreht oder gespiegelt oder gedreht und gespiegelt werden können.

Bemerkungen:

- Allein auf Grund dieser Definition folgt schon, dass keine zwei Spaltenvektoren bzw. Zeilenvektoren voneinander linear abhängig sein können. Mit anderen Worten: Orthogonale Matrizen sind invertierbar.
- Wenn eine Matrix A orthogonal ist, dann ist offensichtlich ihre Transponierte A^T ebenfalls orthogonal.
- Mehrere orthonormale Vektoren müssen nicht nur senkrecht aufeinander stehen (das allein hieße: orthogonal = senkrecht), sondern sie müssen auch alle den Betrag 1 haben, erst dann sind sie orthonormal zueinander. Bei *orthogonalen Matrizen* setzt man voraus, dass ihre Spaltenvektoren nicht nur orthogonal sondern sogar orthonormal sind. Das geht nicht so ganz konform mit der Namensgebung.

Satz (ohne Beweis):

Die Matrix A ist orthogonal ⇔ $\mathbf{A \cdot A^T = A^T \cdot A = E}$.

<u>**Diagonalmatrizen**</u>

Als *Diagonalmatrix* bezeichnet man eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale Null sind. Diagonalmatrizen sind deshalb allein durch die Angabe ihrer Hauptdiagonale bestimmt. Die Hauptdiagonale darf durchaus Nullen enthalten.

Für Diagonalmatrizen vereinfachen sich einige Rechnungen wesentlich, wie man an folgendem Beispiel sieht:

Es sei $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix D stehen grundsätzlich in der Hauptdiagonale (hier: 2, 3 und 5) und die zugehörigen Eigenvektoren sind ganz offensichtlich die sog. kanonischen Basisvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Das Produkt zweier Diagonalmatrizen ergibt sich schnell. Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 65 \end{pmatrix}$$

An der Art der Produktberechnung erkennt man sofort, wie die zu D inverse Matrix aussehen muss: $\mathrm{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Die Menge der <u>regulären</u> Diagonalmatrizen bildet bzgl. der üblichen Matrizenmultiplikation eine kommutative Gruppe.

Was eine Diagonalmatrix bewirkt, sieht man sofort an folgender Beispiels-Multiplikation: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \\ 5z \end{pmatrix}$

Ein beliebiger Vektor wird also in jede der drei Achsenrichtungen mit einem eigenen Faktor, dem Eigenwert, gestreckt bzw. gestaucht.

Ermittlung von Matrizen aufgrund EW und EV

Problem: Gegeben seien für eine (n,n)–Matrix A n reelle Eigenwerte mit n zugehörigen Eigenvektoren. Gesucht ist eine solche Matrix A.

Für die Lösung dieses Problems nutzt man die Gleichung, welche für diagonalisierbare Matrizen A gilt: $A = S \cdot D_A \cdot S^{-1}$.
Außerdem wird benutzt, dass die Spaltenvektoren der Transformationsmatrix S aus genau den Eigenvektoren der gesuchten Matrix A besteht und die Diagonalmatrix D_A in ihrer Hauptdiagonalen die zugehörigen EW in derselben Reihenfolge besitzt.

Der Weg wird hier für (2,2)–Matrizen vorgeführt, und zwar (weil es wesentlich verständlicher ist) an einem konkreten Zahlenbeispiel. Der Lösungsweg funktioniert aber auch völlig analog für beliebig große (n,n)–Matrizen.

Gegeben seien also der EV $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ zum EW 2 und der EV $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zum EW 4.
Natürlich ist darauf zu achten, dass alle gewählten EV voneinander linear unabhängig sein müssen!
Wähle $D_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ mit den EW in der Hauptdiagonalen und $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ mit den zugehörigen EV als Spaltenvektoren. Achte auf die Reihenfolge! Dann folgt:

$$A = S \cdot D_A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= -\begin{pmatrix} -22 & 12 \\ -30 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -12 \\ 30 & -16 \end{pmatrix}$$

Zur Überprüfung rechnet man leicht nach:
$\begin{pmatrix} 22 & -12 \\ 30 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 22 & -12 \\ 30 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgaben:

1. Ermittle jeweils eine Matrix, welche die angegebenen Eigenvektoren mit den zugehörigen Eigenwerten besitzt!