Inhaltsverzeichnis

Vorwort **7**

Hilberts Hotel **8**

Abzählbar unendliche Mengen **15**

Die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen **19**

Mächtigkeit von Mengen **23**

Reelle Zahlen **25**

Berechenbare Zahlen **28**

Überabzählbarkeit der reellen Zahlen **32**

Dichte der rationalen Zahlen **34**

Maß der rationalen Zahlenmenge **36**

Primzahlen **37**

Algebraische Zahlen **39**

Transzendente Zahlen **41**

Die Champernowne Zahl **43**

Büchercodierung **44**

Die Kreiszahl π **46**

Erforderliche Genauigkeit von π **48**

Unendliche Zahlenfolgen **51**

Rekursive Zahlenfolgen **52**

Die Fibonacci-Folge **54**

Verbindung zum „Goldenen Schnitt“ **56**

Rekursionsgleichung umwandeln in Explizite Gleichung **58**

Beweis der Korrektheit des angegebenen Algorithmus **62**

Anwendungsbeispiel **65**

Anwendung: Die Fibonacci-Folge **67**

Bemerkungen zum Algorithmus **69**

Reihen 70

Endliche Reihen 70

Arithmetische Reihen **72**

Geometrische Reihen **73**

Unendliche Reihen 75

Die harmonische Reihe **77**

Taylorreihen **78**

Umordnung und Zusammenfassung bei unendlichen Reihen **80**

Das Treppen-Paradoxon 82

Kettenbrüche 87

Unendliche Kettenbrüche 94

Approximation mit Teilkettenbrüchen 99

Hilberts Hotel

David Hilbert (1862 – 1943) war ein sehr bedeutender deutscher Mathematiker. Im Jahre 1926 veröffentlichte er ein Gedankenexperiment, welches interessierten Laien ein Verständnis der mathematischen Unendlichkeit etwas näher bringen sollte. Dabei geht es um ein fiktives Hotel, welches unendlich viele Zimmer besitzt. Diese haben die Zimmernummern 1, 2, 3, …. bis unendlich.
Üblicherweise wird der Begriff „unendlich“ durch das mathematische Zeichen ∞ dargestellt.

Im Zusammenhang mit diesem „Hilbert–Hotel“ sollen einige Probleme dargestellt und gelöst werden.
In der jeweiligen Anfangssituation dieser Probleme soll das Hotel voll belegt sein, d.h. es gibt kein freies Zimmer.

Problem 1:
Ein neuer Gast erscheint und möchte ein Zimmer buchen.

Obwohl es zunächst unmöglich erscheint, weil alle Zimmer besetzt sind, fällt dem findigen Portier eine verblüffende Lösung ein: Er fordert über seine zentrale Lautsprecheranlage sämtliche Hotelgäste auf, ihr jetziges Zimmer zu verlassen und stattdessen das nächste Zimmer zu belegen. Also der Gast aus Zimmer 1 geht in das Zimmer 2, der Gast aus Zimmer 2 geht in das Zimmer 3 usw.
Dadurch wird das Zimmer 1 frei, in welches der neu angekommene Gast nun einziehen kann. Danach ist das Hotel wieder voll belegt.

Es ist klar, dass eine solche Lösung nur funktioniert, weil das Hotel unendlich viele Zimmer besitzt. In einem Hotel mit nur endlich vielen Zimmern könnte der Gast des letzten Zimmers nicht ein Zimmer weiter wandern. Aber in Hilberts Hotel mit unendlich vielen Zimmern gibt es kein letztes Zimmer.

Die ganze Situation kann etwa durch folgenden Ausdruck gekennzeichnet werden: **„1 + ∞ = ∞“**.

Warnung: Dieser Ausdruck kann keinesfalls wie eine mathematische Gleichung behandelt werden! Wenn er eine Gleichung darstellen würde, so könnte man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die „Zahl“ ∞ subtrahieren und es ergäbe sich der mathematische Widerspruch 1 = 0.

Wichtig:
Mit dem Begriff ∞ kann man nicht so wie mit einer normalen Zahl rechnen!

Bemerkung:
Natürlich ist Hilberts Hotel ein rein fiktives Gedankenmodell. Man sollte gar nicht erst versuchen, sich dieses Hotel in der Realität vorzustellen. Es gäbe allein schon nicht unendlich viele Menschen, um es zu füllen. Wenn wir zusätzlich davon ausgehen, dass unser Universum nur endlich und nicht unendlich groß ist, so kann ein solches Hotel auch nicht unendlich groß sein (jedes Zimmer besitzt ein Mindestvolumen). Auch eine zentrale Nachricht, die alle Gäste gleichzeitig erreicht, wäre aus rein physikalischen Gründen unmöglich.
Aber derartige banale, reale Probleme haben einen wirklich an Mathematik interessierten Menschen noch nie sonderlich tangiert.

Falls nun nicht nur ein neuer Gast kommen sollte, sondern beispielsweise 25 neue Gäste, so lässt sich diese neue Situation analog ebenso einfach lösen, dass dies gar nicht erst als neues Problem formuliert werden soll. Anders aber sieht es im Folgenden aus:

Problem 2:
Ein ganzer Reisebus mit unendlich vielen Passagieren kommt an. Kann das Hotel all diese unendlich vielen neuen Gäste aufnehmen?



Gott sei Dank hat der Portier in seiner Schulzeit im Mathematikunterricht gut aufgepasst. Er greift daher zum Mikrofon seiner zentralen Lautsprecheranlage und fordert alle derzeitigen Gäste auf, in das Zimmer mit der doppelten Zimmernummer zu wechseln. Also der Gast aus Zimmer 1 geht in das Zimmer 2, der Gast aus Zimmer 2 geht in das Zimmer 4, der Gast aus Zimmer 3 geht in Zimmer 6 usw.

Dadurch sind zunächst nur alle geraden Zimmernummern belegt und alle ungeraden Zimmernummern (1, 3, 5, 7, 9, …) werden frei. Da es bekanntlich unendlich viele ungerade Zahlen gibt, können sämtliche Gäste aus dem angekommenen Reisebus darin untergebracht werden. Der Fahrgast mit der Nummer n geht in das Zimmer mit der Nummer $2n-1$. Anschließend ist das Hotel wieder voll belegt.

Die ganze Situation kann diesmal etwa durch folgenden Ausdruck gekennzeichnet werden: „$\infty + \infty = \infty$“.
Warnung: Auch dieser Ausdruck kann wieder nicht wie eine mathematische Gleichung behandelt werden! Wenn er eine Gleichung darstellen würde, so könnte man z.B. auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens durch die „Zahl“ ∞ dividieren und es ergäbe sich der mathematische Widerspruch $1 + 1 = 1$. Auch hier zeigt sich wieder:

Mit dem Begriff ∞ kann man nicht so wie mit einer normalen Zahl rechnen!



Falls nun nicht nur ein Bus mit unendlich vielen neuen Gästen vorfahren sollte, sondern beispielsweise zwei (oder auch 25) Reisebusse mit jeweils unendlich vielen Passagieren kommen sollten, so lässt sich diese neue Situation wiederum so einfach lösen, dass dies gar nicht erst als neues Problem formuliert werden soll. Anders aber sieht es wieder im Folgenden aus:

Problem 3:
Es kommen unendlich viele Reisebusse mit jeweils unendlich vielen Passagieren an. Kann das Hotel all diese unendlich vielen neuen Gäste aufnehmen?

Die Antwort lautet: Ja!
Es gibt hier sogar viele Lösungsmöglichkeiten. Drei sehr interessante Lösungen sollen hier vorgestellt werden.

Lösung 1:
Zunächst fordert der Portier wiederum alle bisherigen Gäste auf, in das Zimmer mit der doppelten Zimmernummer zu wechseln. Also der Gast aus Zimmer 1 geht in das Zimmer 2, der Gast aus Zimmer 2 geht in das Zimmer 4, der Gast aus Zimmer 3 geht in Zimmer 6 usw.

Mächtigkeit von Mengen

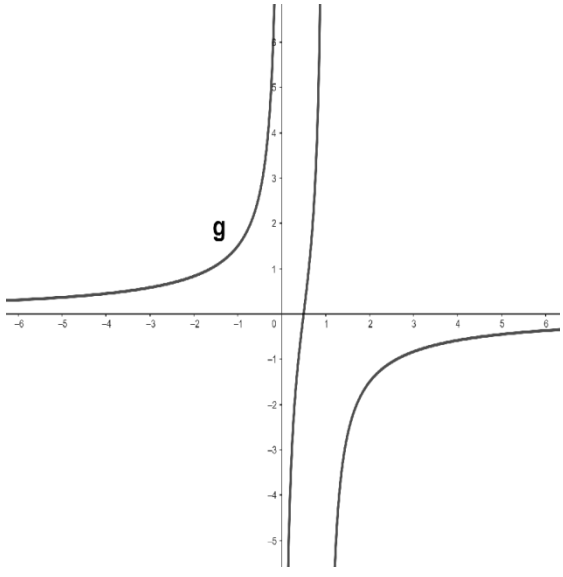
Wir werden in Kürze unendliche Mengen kennenlernen, welche nicht abzählbar unendlich sind. Um unendliche Mengen „anzahlmäßig“ miteinander vergleichen zu können, haben die Mathematiker den Begriff der **Mächtigkeit** eingeführt. Es sollte noch klar sein, dass bei unendlichen Mengen die Begriffe „viel“, „mehr“, „weniger“ und „gleich viel“ nicht mehr sehr hilfreich sind.

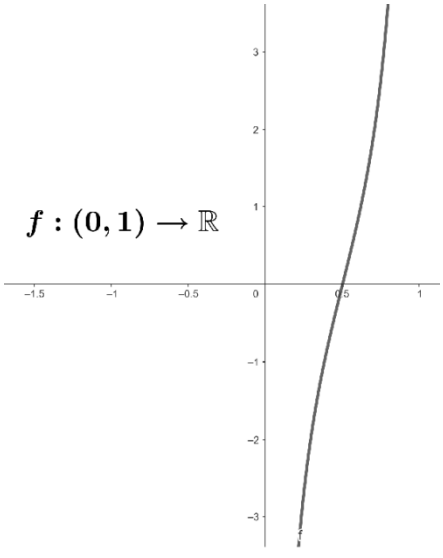
Definition: Zwei Mengen A und B heißen **gleich mächtig** genau dann, wenn es eine bijektive Funktion f: A → B gibt.

Damit folgt, dass die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen genauso mächtig ist wie die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen oder wie die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

Behauptung: **Das offene, reelle Intervall (0, 1) ist genauso mächtig wie die gesamte Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.**

Zum Beweis betrachte die Graphen der beiden Funktionen
f: $(0, 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$ und g: $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$





An dem Graphen der Funktion f erkennt man schon, dass diese Funktion offensichtlich bijektiv ist. Man kann dies aber auch leicht zeigen:

$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} = (1-x)^{-1} - x^{-1}$

$f'(x) = -(1-x)^{-2} \cdot (-1) - (-1) \cdot x^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{x^2} > 0$

Also ist der Graph von f streng monoton steigend, f ist also injektiv.

Zusätzlich gilt für den linksseitigen Grenzwert $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$ und für den rechtsseitigen Grenzwert $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$
Also ist f auch surjektiv. Zusammen folgt: f ist bijektiv.

Insgesamt bedeutet dies, dass das kleine Intervall (0, 1) genauso mächtig ist wie die gesamte Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen.
Anschaulich gesprochen: Es gibt „genauso viele“ reelle Zahlen in dem kleinen Intervall (0, 1) wie in ganz $\mathbb{R}$. Das ist irgendwie kaum vorstellbar (aber bedenke, dass der Begriff „genauso viele“ bei unendlichen Mengen nicht wirklich hilfreich ist)!

Auch die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und die Menge der positiven geraden Zahlen sind gleich mächtig, denn man kann umkehrbar eindeutig jeder natürlichen Zahl *n* ihr Doppeltes $2 \cdot n$ zuordnen, obwohl die positiven geraden Zahlen echt in den natürlichen Zahlen enthalten sind.

Das bedeutet interessanterweise, dass eine unendliche Menge A durchaus eine echte Teilmenge besitzen kann, welche gleich mächtig zu A ist.

Primzahlen

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl größer als 1, die nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilbar ist.
Oder anders formuliert: Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die durch genau zwei unterschiedliche natürliche Zahlen ohne Rest teilbar ist.
Die ersten Primzahlen sind 2, 3, 5 und 7

Demnach ist die Zahl 1 also keine Primzahl. Es gibt gute Gründe dafür, dass die Zahl 1 als Primzahl ausgeschlossen wurde:

Wäre die Zahl 1 eine Primzahl, so könnte man eine beliebige natürliche Zahl nicht mehr **eindeutig** in ihre Primfaktoren zerlegen.
Beispiel: $6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ usw.
Die eindeutige Primzahlzerlegung ist jedoch für viele mathematische Beweise wichtig.

Außerdem müssten etliche mathematische Sätze, in denen Primzahlen vorkommen, deutlich umständlicher formuliert werden, wenn die Zahl 1 als Primzahl gelten würde.

Schon im dritten Jahrhundert vor Christus bewies der Grieche *Euklid*, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Sein im Folgenden dargestellter Beweis zeigt, dass aus den ersten k Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots, p_k$ zwingend die Existenz einer weiteren Primzahl gefolgert werden kann.

Dazu bildet man das Produkt dieser ersten k Primzahlen und addiert 1 dazu. Das Resultat wird P_k genannt: $P_k := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$

Die k Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots, p_k$ können auf gar keinen Fall Teiler von P_k sein, denn bei der Division von P_k durch eine dieser Primzahlen bleibt immer der Rest 1 übrig.

Jetzt ist man schon fast geneigt, zu glauben, diese Zahl P_k wäre wieder eine Primzahl, aber leider gilt: Diese so gebildete Zahl P_k ist oft, aber nicht immer, eine Primzahl. Das lässt sich leicht zeigen:

Wegen $P_k > 1$ gibt es einen kleinsten Teiler $d > 1$ von P_k . Falls P_k selbst eine Primzahl ist, dann wäre $d = P_k$. Auf jeden Fall ist d notwendigerweise eine Primzahl und teilerfremd zu 2, 3, 5, 7, 11, …, p_k . Daher ist mit d eine *weitere* Primzahl gefunden.

Im Folgenden werden die so gebildeten Zahlen P_1 bis P_{11} beispielhaft vorgestellt. Die ersten fünf dieser Zahlen stellen sich als prim heraus, die nächsten fünf als zusammengesetzt:

$P_1 := 2 + 1 = 3$ prim
$P_2 := 2 \cdot 3 + 1 = 7$ prim
$P_3 := 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ prim
$P_4 := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$ prim
$P_5 := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2\,311$ prim

$P_6 := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30\,031 = 59 \cdot 509$
$P_7 := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 = 510\,511 = 19 \cdot 97 \cdot 277$
$P_8 := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 + 1 = 9\,699\,691 = 347 \cdot 27953$
$P_9 := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 + 1 = 223\,092\,871 = 317 \cdot 703763$
$P_{10} := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 + 1 = 6\,469\,693\,231$
$= 331 \cdot 571 \cdot 34231$

$P_{11} := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 + 1 = 200\,560\,490\,131$ prim

Bemerkungen:
- Die Untersuchung der Zahl P_6 ergibt zwei „neue“ Primzahlen 59 und 509

- Im Jahre 2024 hat ein Hobbymathematiker aus den USA die zu jener Zeit größte bekannte Primzahl gefunden. Es handelt sich um die Zahl
  $p = 2^{136\,279\,841} - 1 \approx 8{,}8 \cdot 10^{41\,024\,319}$
  Als Dezimalzahl besitzt sie also mehr als 41 Millionen Stellen.

Unendliche Kettenbrüche

Als einfachstes Beispiel eines rein periodischen Kettenbruches berechnen wir folgenden unendlichen **regulären** Kettenbruch:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

Eine andere Darstellung wäre: $x = [1; 1, 1, 1, \ldots]$ oder auch $x = [1; \overline{1}]$.

Es ist klar, dass x positiv sein muss (falls man x überhaupt berechnen kann).

Der entscheidende Lösungsgedanke zur Berechnung dieses unendlichen Kettenbruches kommt, wenn man obige Darstellung für x genauer betrachtet. Es gilt nämlich folgende Gleichung: $x = 1 + \frac{1}{x}$

Multiplikation dieser Gleichung mit x liefert: $x^2 = x + 1$
Diese quadratische Gleichung lässt sich leicht lösen:
$x^2 - x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Da x positiv sein muss, folgt $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$
Dieses Ergebnis sollte übrigens auch als ***„Goldener Schnitt“*** bekannt sein.

Als zweites einfaches Beispiel eines rein periodischen Kettenbruches berechnen wir nun folgenden unendlichen **regulären** Kettenbruch:

$$y = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} = [2; \overline{2}]$$

Auch y sollte, falls man es überhaupt berechnen kann, positiv sein.
Offensichtlich gilt hier: