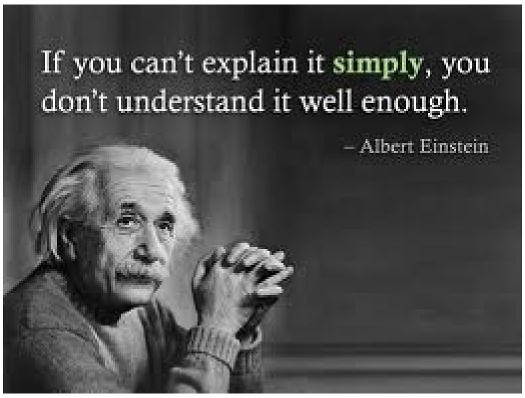
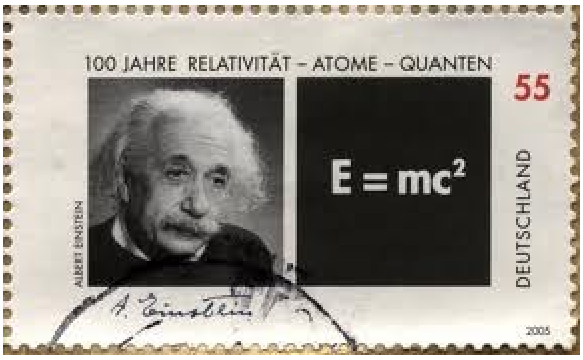




Relativitätstheorie

bearbeitet von
Dieter Lindenberg

Version 2021

Inhaltsverzeichnis

Spezielle Relativitätstheorie 3

I. Äther..3

II. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. 9

III. Zeit und Zeitdilatation......................................10

Aufgaben 17

Das Zwillingsparadoxon...21

IV. Relative Gleichzeitigkeit 25

V. Längenkontraktion 27

VI. Koordinatenumrechnungen 32

A. Die Galilei-Transformation..................................32

B. Die Lorentz-Transformation................................34

VII. Das Geschwindigkeitsadditionstheorem 39

VIII. Optischer Doppler-Effekt................................41

IX. Die relativistische Massenformel...................47

X. Äquivalenz von Masse und Energie 52

Allgemeine Relativitätstheorie 59

Die Krümmung des Raumes.....................................61

Die Zeit im Gravitationsfeld 63

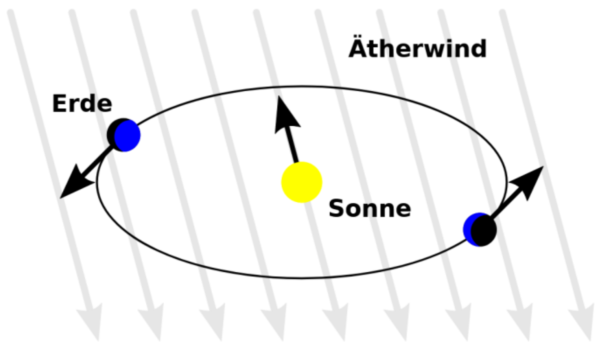
Größe eines schwarzen Loches 67

Spezielle Relativitätstheorie

I. Äther

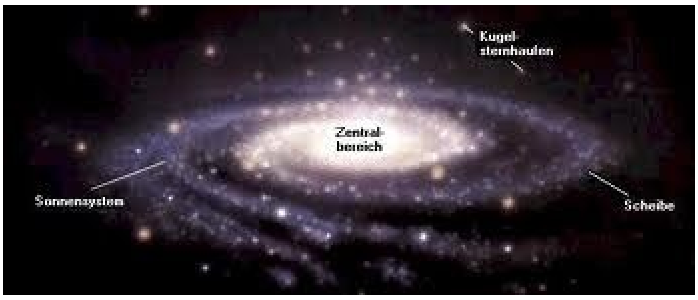
Im Laufe des 19. Jahrhunderts wurde es immer klarer, dass Licht Welleneigenschaften besaß (Beugung, Interferenz). Die Teilcheneigenschaft des Lichtes wurde erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts entdeckt.

Beugungserscheinungen beobachtete man aber nicht nur beim Licht, sondern auch bei Schall. Genau wie Schall eine Dichte- bzw. Druckschwingung der Luft ist, so sollte Licht irgendeine Schwingung des sog. Äthers sein. Da Licht selbst von den entferntesten Sternen zu uns gelangt, konnte es nur eine Schwingung eines überall (also auch im Vakuum) vorhandenen Mediums, eben des Äthers sein.



Die Suche nach diesem Äther bzw. die Bestimmung seiner Eigenschaften schien eine der Hauptaufgaben der damaligen Physik zu sein. Das Ruhesystem dieses Äthers wäre dann offensichtlich der „Absolute Raum", in dem sich sämtliche Planeten, Sterne und Milchstraßen bewegen.

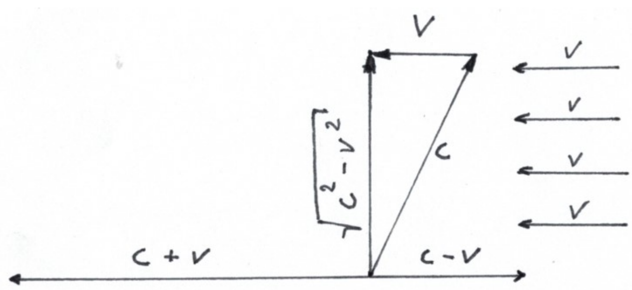
Licht war also nach damaliger Ansicht eine Welle, die sich im Äther fortpflanzt und zwar in alle Richtungen mit derselben Geschwindigkeit $c \approx 300\,000\ \frac{km}{s}$.



Unsere Milchstraße rotiert in etwa 20 Millionen Jahren einmal um ihre Achse. Die Erde ist rund 3000 Lichtjahre vom Zentrum der Milchstraße entfernt. Mit welcher Geschwindigkeit rotiert also unser Sonnensystem um dieses Zentrum?
Mit welcher Geschwindigkeit umkreist unsere Erde unsere Sonne?
Mit welcher Geschwindigkeit rotiert ein Punkt auf dem Erdäquator?

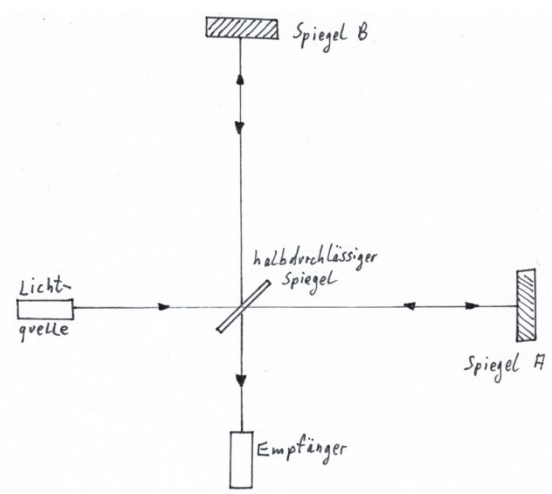
Der Amerikaner Albert Michelson (1852 bis 1931) ersann ein Experiment, mit dem man die Relativbewegung zwischen unserer Erde und dem Äther ermitteln können sollte. Nur die Grundidee dieses Experimentes wird im Folgenden dargestellt. Viele Feinheiten bzw. Teilprobleme, die in diesem Experiment auftauchen, werden dabei nicht behandelt.

Bewegt sich die Erde mit der Geschwindigkeit v durch den Äther, so sollte das Licht in einer bestimmten Richtung der Erdbewegung entgegeneilen, während es in der Gegenrichtung mit der Erde mitläuft. Die auf der Erde gemessenen Werte der Lichtgeschwindigkeit betragen daher in diesen beiden Richtungen c+v bzw. c-v.



Aus nebenstehendem Bild liest man ferner ab, dass sich die Lichtgeschwindigkeit senkrecht zur Richtung der Erdbewegung durch den Äther zu $\sqrt{c^2 - v^2}$ ergibt.

Diese Unterschiede in der Lichtgeschwindigkeit wollte Michelson zur Bestimmung der Erdbewegung folgendermaßen ausnutzen: Lichtsignale durchlaufen zwei aufeinander senkrecht stehende Arme eines „Michelson Interferometers“ und werden dort von Spiegeln wieder zum Ausgangspunkt zurückreflektiert.



Das Licht aus der Quelle wird durch eine planparallele Platte in zwei Teilstrahlen aufgespalten, welche zwei aufeinander senkrecht stehende Arme jeweils hin und her laufen. Anschließend wird im Empfänger die Interferenz der beiden Teilstrahlen miteinander beobachtet.

Eventuelle Laufzeitdifferenzen der beiden Teilstrahlen sollten sich im Interferenzbild bemerkbar machen.

In der obigen Skizze haben die Spiegel A und B denselben Abstand von der planparallelen Platte. Dies ist für den Versuch nicht unbedingt erforderlich, aber es vereinfacht die zugehörige Rechnung. Abstände konnten damals mit Sicherheit nicht auf mehrere Nanometer genau eingestellt werden. Viele weitere Probleme müssen bei dem Versuch beachtet werden. Dazu gehören z.B. monochromatisches Licht, kohärentes Licht, Dicke und Brechungsindex der planparallelen Platte, Erschütterungsfreiheit des Versuchsaufbaus usw.
Wie bereits erwähnt, soll hier nur die Grundidee des Experimentes vorgestellt werden.

Falls zufälligerweise ein Arm der Länge l in Richtung der Erdbewegung durch den Äther steht, benötigt das Licht für den Hin- und Rückweg die Zeit

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2 \cdot l \cdot c}{c^2 - v^2} = \frac{2 \cdot l}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Für den in diesem Fall senkrecht zur Erdbewegung stehenden anderen Arm ist die Lichtlaufzeit gegeben durch

$$t_2 = \frac{2 \cdot l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2 \cdot l}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Der Laufzeit-Unterschied

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2 \cdot l}{c} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

wechselt sein Vorzeichen, wenn man das Interferometer um 90° dreht. Dabei werden nämlich die beiden Arme des Interferometers vertauscht und derjenige, der zunächst in Richtung der Erdbewegung gelegen war, steht nun senkrecht dazu und umgekehrt. Diese Veränderung des Laufzeitunterschieds versuchte Michelson mit Hilfe einer Interferenzmethode zu bestimmen.

Natürlich kennt man zunächst nicht die genaue Richtung, in die sich der Ort, in dem das Experiment stattfindet, bzgl. des Äthers bewegt. Man bedenke, dass sich die Erde um ihre eigene Achse dreht und gleichzeitig auch noch um unsere Sonne rotiert. Zusätzlich dreht sich auch noch unser gesamtes Sonnensystem innerhalb unserer Milchstraße.
Wenn man die gesamte Versuchsordnung nun langsam um 0° bis 90° dreht, so muss aber auf jeden Fall für irgendeinen Winkel dazwischen der Phasenunterschied 0° sein (und anderswo auch 180°) betragen.

Das Experiment von Michelson und seinem Kollegen Morley wurde 1886 in Cleveland, Ohio durchgeführt. Es ist als Michelson-Morley-Experiment berühmt geworden.

Das Michelson-Interferometer wurde auf einer großen Steinplatte aufgebaut, die in einem Quecksilbertrog schwamm. Dadurch konnte man die Drehung erschütterungsfrei ausführen. Außerdem stand während des Versuches der gesamte Verkehr in Cleveland still.

Das Experiment konnte trotz sorgfältigster Ausführung keinen Laufzeitunterschied bzw. Phasenunterschied zwischen den beiden Lichtstrahlen feststellen. Dabei hätte man mit der damaligen Messgenauigkeit durchaus eine Erdgeschwindigkeit im Äther von wenigen Kilometern pro Sekunde feststellen können. Man bedenke, dass allein die Rotationsgeschwindigkeit der Erde um die Sonne rund 30 $\frac{km}{s}$ beträgt. Der Einfluss der Rotationsgeschwindigkeit der Erde um die eigene Achse beträgt (maximal am Äquator) nur höchstens etwa 0,5 $\frac{km}{s}$ und hätte damals also für das Experiment keine Rolle gespielt. Allerdings hat allein die Tatsache, dass die Erde um sich selbst rotiert, schon einen Einfluss auf das Experiment, wie wir gleich noch sehen werden.
Dass unser gesamtes Sonnensystem mit etwa 280 $\frac{km}{s}$ um das Zentrum unserer Milchstraße rotiert, war damals noch nicht bekannt.

Einige Aspekte zum Experiment sollen noch erwähnt werden:

Was wäre, wenn zufällig der Geschwindigkeitsvektor des Äthers senkrecht von oben auf den im Quecksilber schwimmenden Experimentaufbau (in Cleveland) stehen sollte? Dann würde auch theoretisch keine Laufzeitdifferenz zwischen den beiden Teilstrahlen im Versuch auftreten.
Lösung: Wenn Cleveland (41. Nördlicher Breitengrad) auf dem Äquator läge, bräuchte man das Experiment nur einen Vierteltag später wiederholen. Dann müsste wegen der Eigenrotation der Erde der Äther sich parallel zur Experimentierplatte bewegen. Da Cleveland nicht auf dem Äquator liegt, gilt diese Aussage so exakt natürlich nicht. Aber Stunden später nach dem ersten Experiment würde auch in Cleveland die Ätherbewegung nicht mehr senkrecht zur Experimentierplatte sein.

Was wäre, wenn das Experiment an einem Jahrestag stattgefunden hätte, an dem sich unsere Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne herum zufällig parallel zum Ätherwind bewegt hätte (und noch zufälliger mit derselben Geschwindigkeit von rund 30 $\frac{km}{s}$)? Hier ergäbe sich eine ähnliche Lösungsmöglichkeit.

Was wäre, wenn zufällig der Geschwindigkeitsvektor des Äthers in einem Winkel von 45° parallel zur Experimentierplatte verlaufen sollte? Dann würde auch theoretisch keine Laufzeitdifferenz zwischen den beiden Teilstrahlen im Versuch auftreten.
Lösung: Man dreht die Versuchsanordnung nicht nur einmal um 90° sondern wiederholt den Versuch mehrmals mit unterschiedlichen Ausgangslagen.

Heute, im 21. Jahrhundert, könnte man sogar mit Hilfe von Laserlicht eine Erdgeschwindigkeit von nur $3\,\frac{cm}{s}$ im Äther feststellen. Es ist allerdings niemals gelungen, eine etwaige Bewegung im Äther zu messen.

Das Ergebnis des Experimentes bzw. die Tatsache, dass man die Existenz des Äthers nicht nachweisen konnte, veranlasste niemanden zu der Annahme dass die Erde doch Mittelpunkt des Universums sei und sich alles um die Erde drehte. Dafür gab es denn doch zu viele Gegenbeweise (man denke nur an die Bewegung der Erde um die Sonne).

Schließlich trat im Jahre 1905 *Albert Einstein (1879 bis 1955)* mit einer neuen Idee an die Öffentlichkeit. Seine Hypothese war so einfach wie auch genial:

Man kann die Erdbewegung durch den Äther deswegen nicht messen, weil der Äther gar nicht existiert.

Einsteins relativ einfach erscheinende Annahme (dass kein Äther existiert) ist bis heute durch sehr viele Experimente absolut sicher bewiesen. Die Folgerungen aus dieser Annahme sind einerseits belanglos für unser alltägliches Leben, solange es sich nicht um technische Systeme wie z.B. Ortsbestimmungen mit GPS-Geräten handelt (Beispiele: Navigatoren im Auto oder im Handy). Andererseits ergeben sich aus dieser Annahme Konsequenzen für die Hochgeschwindigkeitsphysik. Auch für völlig theoretische, aber die Menschheit stark interessierende Fragen (etwa: „Gibt es die realistische Möglichkeit, zu anderen Sternen zu fliegen"), gibt es Antworten, die einfach unglaublich und phantastisch erscheinen.

Wenn es keinen Äther gibt, so gibt es keinen „absoluten Raum"; es gibt dann keine absolute Geschwindigkeit. Nur die Relativbewegung eines Körpers in Bezug auf einen anderen kann in der Physik von Bedeutung sein.

In diesem Zusammenhang erlangen unterschiedliche Bezugssysteme Bedeutung. Man bezeichnet <u>nicht beschleunigte</u> Systeme als **Inertialsysteme**. Einstein zeigte später in seiner *ALLGEMEINEN RELATIVITÄTSTHEORIE*, dass Beschleunigung und Gravitation physikalisch identisch sind. Wir werden im letzten Teil dieses Skriptes darauf eingehen.

Ein rotierendes System (Zentripetalbeschleunigung!) ist also kein Inertialsystem; ebenso wenig wie ein Zimmer auf der Erde (Gravitation). Aber z.B. die Luftkissenfahrbahn bildet ein ***Inertialsystem***, da dort die Gravitations- und Reibungskräfte ausgeschaltet sind.

Definition: In einem ***Inertialsystem*** verharrt jeder Körper im Zustand der Ruhe bzw. der geradlinig-gleichförmigen Bewegung, solange keine äußere Kraft auf ihn wirkt.

Da es keinen absoluten Raum gibt, müssen sich alle Inertialsysteme gleichermaßen zur Erklärung der Physik eignen.

Relativitätsprinzip:
Die Naturgesetze nehmen in allen Inertialsystemen die gleiche Form an.

II. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

In welchem System breitet sich Licht mit der Lichtgeschwindigkeit c aus? Wenn alle Inertialsysteme gleichberechtigt sind, so muss sich ein Lichtsignal offensichtlich in jedem dieser Systeme in allen Richtungen mit Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum) ausbreiten.

Literaturwert: $c = 299\,792,458 \, \frac{km}{s}$

Diese Konstanz der Lichtgeschwindigkeit führt sofort zu ersten, schwer vorstellbaren Phänomenen. Beispiel:

Ein Raumschiff entfernt sich mit $200\,000 \, \frac{km}{s}$ von der Erde und schaltet plötzlich seine Scheinwerfer ein. Das Scheinwerferlicht entfernt sich mit rund $300\,000 \, \frac{km}{s}$ vom Raumschiff und ebenfalls mit (nur) $300\,000 \, \frac{km}{s}$ von der Erde. Dies ist eine Folge der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit bzw. der Tatsache, dass es keinen Äther gibt.

Man kann das obige Beispiel experimentell nachweisen, indem man z.B. radioaktive Atome (bzw. Ionen) auf hohe Geschwindigkeiten beschleunigt, welche dann bei ihrem Zerfall Lichtblitze aussenden. Die Geschwindigkeit dieser Lichtblitze beträgt auch im Laborsystem nur rund $300\,000 \, \frac{km}{s}$.

Wichtig: In einem beschleunigten System hat die Lichtgeschwindigkeit nicht denselben Wert wie in einem Inertialsystem.

III. Zeit und Zeitdilatation

Bis 1967 beruhte die Sekunde auf astronomischen Messungen:
Die sog. **Sonnensekunde** (bis in die 1950er-Jahre) war der Bruchteil $\frac{1}{86400}$ des <u>mittleren</u> Sonnentages. Diese Festlegung wurde eingeführt, damit ein durchschnittlicher Sonnentag $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400$ Sekunden lang ist. Das entspricht der Zeitspanne, innerhalb der die Sonne wieder an der gleichen Stelle zu sehen ist. (Diese Zeitspanne entspricht nicht völlig der Zeit, die die Erde für eine Umdrehung braucht – letztere ist um ca. $\frac{1}{365}$ kürzer und dauert nur etwa 86 164 Sekunden. Die Differenz ergibt sich aus der Tatsache, dass die jährliche Umdrehung der Erde um die Sonne in die Berechnung des Tages mit eingeht.)

1938 wurde entdeckt, dass die Erdrotationsgeschwindigkeit nicht konstant ist. Die astronomische Tageslänge ist wegen der Verlangsamung der Erdrotation (Gezeitenreibung) und einiger unregelmäßiger Änderungen durch Magmaströme zwischen Erdmantel und Erdkern als Grundlage des Zeitnormals schlechter geeignet als die damals entwickelten Quarzuhren. Durch die Verlangsamung der Erdrotation verschiebt sich der **Sonnentag** gegenüber dem Zeittag. Zur Kompensation wurden Schaltsekunden eingeführt, um alle Uhren mit dem zwar nur um Sekundenbruchteile, aber länger werdenden **Sonnentag** zu synchronisieren.

Im Jahre 1967 wurde die Zeiteinheit folgendermaßen festgelegt:
1 Sekunde ist das 9 192 631 770 fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Mikrowellenstrahlung.

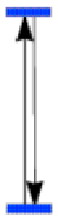
Natürlich kann man sich fragen, warum man ausgerechnet dieses spezielle Element Cäsium gewählt hat. Der Grund dafür liegt darin, dass man diese Strahlung in den 60er Jahren extrem genau bestimmen konnte. Heute (2021) ist man dabei, mit sichtbarem Licht Atomuhren zu bauen, welche noch einmal 1 000 Mal präziser sind als die Cäsium-Uhren. Die nächste Definition der Sekunde dürfte also bald zu erwarten sein.

Ebenso kann man sich fragen, warum man ausgerechnet diesen relativ krummen Faktor 9 192 631 770 gewählt hat. Der Grund dafür ist natürlich, dass man weiterhin rund 24 Stunden für die Eigenrotationszeit der Erde beibehalten möchte (und damit auch rund 365,25 Tage für ein Jahr).

Die Eigenrotationszeit der Erde anzugeben, ist übrigens auch eine durchaus nicht einfache Aufgabe: Wann ist die Erde (nach einer Rotation) wieder in derselben Lage? Wenn die Sonne am nächsten Tag wieder mittags in exakter

Südrichtung steht?
Wenn ein Stern am nächsten Tag wieder in derselben Himmelsrichtung erscheint? Frage: Welcher Stern?
Oder noch genauer: Wenn eine entfernte Galaxie wieder in derselben Himmelsrichtung erscheint?

Um die folgenden Überlegungen zu erleichtern, konstruieren wir zunächst in Gedanken eine möglichst einfache Uhr. In dieser sog. *„Lichtuhr“* läuft ein Lichtsignal immer hin und her.
Für die Wahl der *Lichtuhr* ist ausschlaggebend, dass sich das Lichtsignal sowohl in ruhenden wie auch in bewegten Uhren mit derselben Lichtgeschwindigkeit c bewegt. Diese für das weitere wichtige Tatsache gilt zum Beispiel für „akustische Uhren“ oder mechanische Uhren nicht.

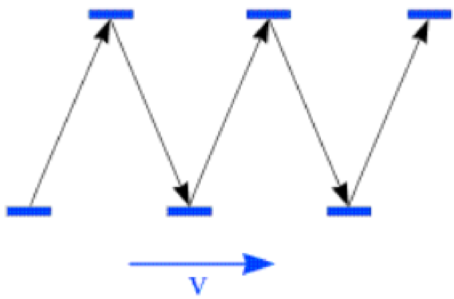


Die *Lichtuhr* besteht aus einem Zylinder, an dessen oberen Ende sich eine Blitzlampe befindet. Außerdem gehört zur *Lichtuhr* ein Anzeigedisplay, damit die Zeit auch abgelesen werden kann. Ein von der Lampe ausgesendeter Lichtblitz durchläuft den Zylinder und wird am unteren Ende von einem Spiegel reflektiert. Wenn der Lichtblitz wieder am oberen Ende eintrifft, soll von der Lampe sofort ein neuer Blitz ausgesendet werden und die Anzeige erhöht sich um eine Zeiteinheit weiter. Damit haben wir eine vollständige Uhr. Die Zeit, die der Lichtstrahl zum Hin- und Rücklauf benötigt, ist die Zeiteinheit dieser Uhr. Ist die Länge des Zylinders beispielsweise $l = 15$ cm, dann ist die Zeiteinheit $\Delta t = \frac{2 \cdot l}{c} = 1ns$

Betrachten wir nun eine sich bewegende *Lichtuhr*, die sich beispielsweise in einem Zug befindet, der mit der sehr großen Geschwindigkeit v gerade durch einen Bahnhof fährt.

Für die mitfahrenden Fahrgäste bewegt sich der Lichtstrahl innerhalb des Zuges natürlich nur senkrecht hoch und runter.

Für Außenstehende am Bahnsteigrand bewegt sich dieser Lichtstrahl im Zug allerdings schräg hoch und runter.



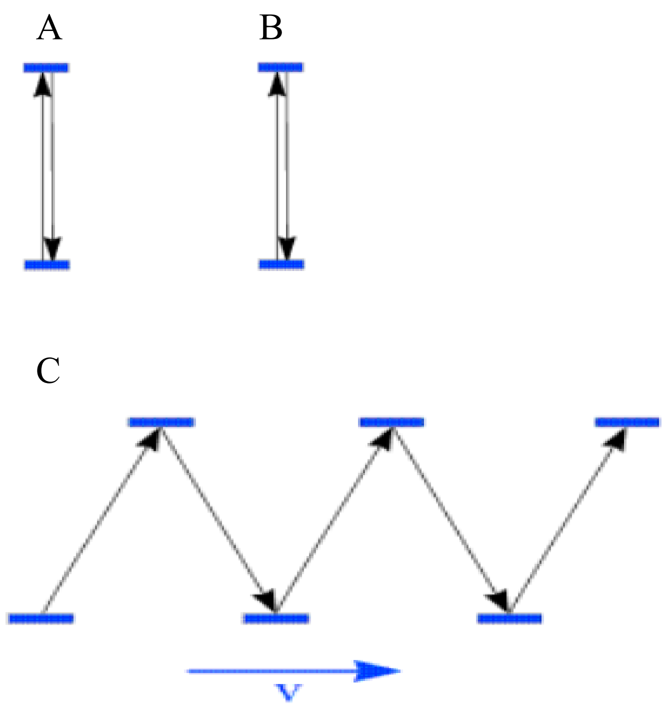
So weit, so gut. Aber jetzt kommt die Überraschung! Für die Außenstehenden am Bahnsteigrand steht natürlich fest, dass der Lichtstrahl im Zug auf seinem Hin- und Herlauf von unten nach oben und zurück eine größere Strecke als 30cm zurückgelegt hat. Weil die Lichtgeschwindigkeit aber in allen Inertialsystemen identisch groß ist, muss dieser Lichtstrahl im Zug (für die Außenstehenden!) für seinen schrägen Weg auch mehr als 1 ns benötigt haben.

Die Mitfahrenden im Zug werden dies natürlich bestreiten. Für sie handelt es sich um eine ganz normale *Lichtuhr*, deren Lichtstrahl für den Hin- und Herlauf selbstverständlich nur 1 ns benötigt.

Um den Sachverhalt genauer zu untersuchen, werden am Bahnsteigrand zwei miteinander synchronisierte Uhren A und B aufgestellt. Diese Uhren sollen synchronisiert sein, indem sie z.B. vom Licht einer Blitzlampe in Gang gesetzt wurden, die man genau in der Mitte zwischen den beiden Uhren gezündet hatte.

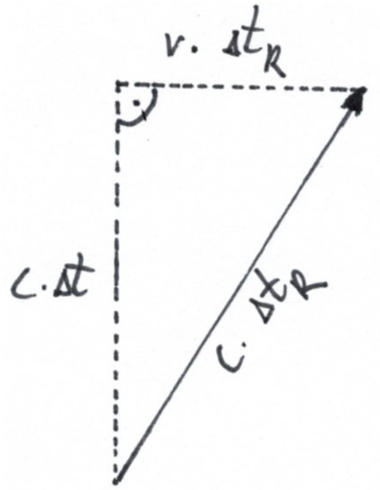
Die Uhr im Zug habe den Namen C.

Wenn die Uhr C an der Uhr A vorbeikommt, seien diese beiden Uhren beide auf Null gestellt (das vereinfacht nur die weitere Überlegung). Die Uhr B wird in einem derartigen Abstand aufgestellt, dass die Uhr C genau dann an B vorbeikommt, wenn im Zug der Lichtstrahl der Uhr C einmal hoch und runter gelaufen ist. In diesem besagten Moment lässt sich an der Uhr B die auf dem Bahnsteig vergangene Zeitspanne Δt_R ablesen, die vergangen ist, seitdem die Uhr C an der Uhr A vorbeikam.
Man kann sich fragen, wie man den genauen Aufstellungsort der Uhr B bestimmen kann: Zum einen kann man, wenn man die genauen physikalischen Zusammenhänge schon kennt (der geneigte Leser kennt sie zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht), diesen Ort berechnen. Zum anderen kann man es einfach experimentell ausprobieren.
Außerdem kommt es auch überhaupt nicht darauf an, zu welchem Zeitpunkt die Uhren B und C aufeinander treffen. Wichtig ist nur, dass man in diesem Moment des Aufeinandertreffens beide Uhren ablesen kann. Aber es erleichtert die gedanklichen Überlegungen, wenn in diesem Moment im Zug der Licht-strahl der Uhr C gerade einmal hoch und runter gelaufen ist.



Innerhalb des Zuges ist für diesen Vorgang nur die geringere Zeitspanne Δt vergangen.

Diesen Effekt (unterschiedliche Zeitspannen) bezeichnet man als ***Zeitdilatation***.
Um die Zeitdilatation zu berechnen, müssen wir feststellen, welche Beziehung zwischen der Zeitspanne Δt der bewegten Uhr im Zug und der Zeitspanne Δt_R auf dem Bahnhof besteht, die wir an den ruhenden Uhren ablesen.



Läuft das Lichtsignal in der bewegten Uhr C einmal hinauf, so zeigt C die Zeit $\Delta t = \frac{15cm}{c}$ an.
Vom Standpunkt der bewegten Uhr hat das Lichtsignal ja lediglich die Zylinderhöhe *15cm* zurückgelegt.

Vom Standpunkt der ruhenden Uhren dagegen hat das Licht einen wesentlich längeren Weg zurückgelegt und dafür die Zeit Δt_R benötigt, die wir mit Hilfe der obigen Abbildung berechnen können. Nach Pythagoras folgt nämlich:

$$(c \cdot \Delta t)^2 + (v \cdot \Delta t_R)^2 = (c \cdot \Delta t_R)^2$$
$$c^2 \cdot \Delta t^2 + v^2 \cdot {\Delta t_R}^2 = c^2 \cdot {\Delta t_R}^2$$

oder, wenn wir nach Δt auflösen:

$$\boldsymbol{\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Damit haben wir den gesuchten Zusammenhang zwischen der Zeitspanne Δt der Uhr im bewegten System und der Zeitspanne Δt_R im ruhenden System gefunden.

Beispiel: Wenn $v = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot c$ dann ist $\Delta t = 0{,}5\ \Delta t_R$
Das bedeutet, wenn im ruhenden System in den Uhren A und B das Lichtsignal zweimal runter und hoch läuft, so geschieht dies im bewegten System nur einmal.
Oder anders formuliert: Wenn im ruhenden System 2 Sekunden vergehen, vergeht im bewegten System nur 1 Sekunde.

Wichtiger Hinweis:
Die obige Formel über die Zeitdilatation bezieht sich über Zeit**differenzen**, also **Zeitspannen**. Man mache sich klar, dass der Term Δt_R genau der Zeitspanne entspricht, die an dem einzigen Ort der *Lichtuhr* A vergeht, bis die Uhr C am Ort von B angekommen ist! Die Uhren A und B sind im Bahnsteigsystem synchronisiert, d.h. beide Uhren zeigen dieselbe Zeit (im Bahnsteigsystem) an.

Die Uhr C hat zu den zwei unterschiedlichen Zeitpunkten (Zusammentreffen von C mit A und Zusammentreffen von C mit B), an denen die Zeit gemessen wird, im Bahnsteigsystem unterschiedliche Ortskoordinaten, aber im Zugsystem identische Ortskoordinaten.

Der Term Δt in der obigen Formel entspricht genau der Zeitspanne im Zugsystem, die an dem einzigen Ort (im Zugsystem!) der *Lichtuhr* C vergeht, welche die Uhr C vom Ort der Uhr A bis zum Ort der Uhr B benötigt hat! Die Uhren A und B sind im Bahnsteigsystem synchronisiert, d.h. beide Uhren zeigen (im Bahnsteigsystem!) dieselbe Zeit an.

Wichtiges Ergebnis: **Die obige Formel für die Zeitdilatation gilt nur für Zeitspannen bzw. Zeitdifferenzen!**

Wir werden im nächsten Kapitel auch Formeln herleiten, welche den Zusammenhang zwischen einzelnen Zeitpunkten in den beiden unterschiedlichen Inertialsystemen angeben.

Kritiker der Relativitätstheorie behaupten, dass bereits diese erste hergeleitete Formel für die Zeitdilatation im Widerspruch zum Relativitätsprinzip steht. Denn die obige Argumentation ergab, dass die bewegte Uhr C langsamer als die ruhenden Uhren A und B geht.
Man könnte aber auch die Uhr C als ruhend betrachten und die beiden Uhren A und B als bewegt. Würde dann nicht dieselbe Argumentation wie oben zeigen, dass die nun bewegten Uhren A und B langsamer als C gehen? Das sähe doch ganz nach einem Widerspruch aus!

Um diesen Widerspruch zu entkräften, werden wir gleich zeigen, dass die beschriebene Problematik **nicht symmetrisch** bzgl. der beiden Inertialsysteme (Zug bzw. Bahnsteig) ist, obwohl es auf den ersten Blick so aussieht.

Zum besseren Verständnis betrachte aber zuvor ein sehr ähnliches (und hoffentlich bekanntes) Beispiel aus der Akustik:

Eine Autohupe habe die Frequenz des Kammertons a (440Hz). Die Schallgeschwindigkeit in ruhender Luft betrage 340 $\frac{m}{s}$. Das hupende Auto und ein Beobachter sollen sich mit einer Relativgeschwindigkeit von $v = 30\frac{m}{s}$ aufeinander zu bewegen. Der Beobachter wird auf Grund des Dopplereffektes in beiden folgenden Fällen eine höhere Frequenz hören.

Fall 1: Das hupende Auto bewegt sich auf den ruhenden Beobachter zu. Für diesen Fall lässt sich die Formel $f_B = \frac{c}{c-v} \cdot f$ herleiten. Demnach hört der Beobachter einen Ton der Frequenz 483 Hz.

Fall 2: Der Beobachter bewegt sich auf das ruhende, hupende Auto zu. Für diesen Fall lässt sich die Formel $f_B = \frac{c+v}{c} \cdot f$ herleiten. Demnach hört der Beobachter einen Ton der Frequenz 478 Hz.

Obwohl auch hier auf den ersten Blick beide Fälle irgendwie symmetrisch erscheinen, ergibt sich bei genauerer Betrachtung doch ein Unterschied: Die Relativgeschwindigkeit zwischen der Schallwelle und dem Beobachter ist in diesen beiden Fällen unterschiedlich. Das führt zu unterschiedlichen Formeln und damit auch zu unterschiedlichen Ergebnissen.

Wir werden nun zeigen, dass auch hier in der Relativitätstheorie die beiden besprochenen Fälle (Bahnsteig ruht mit zwei Uhren, Zug bewegt mit einer Uhr bzw. umgekehrt) nicht symmetrisch sind und es deshalb auch keinen Widerspruch geben kann.

Man muss berücksichtigen, dass die Verlangsamung der bewegten Uhr C im obigen Gedankenversuch dadurch festgestellt wird, dass die **eine sich bewegende** Uhr C an **zwei ruhenden** Uhren vorbeifliegt, welche im Bahnsteig-Inertialsystem synchronisiert sind. Wenn C an A vorbeifliegt, kann A die Zeit von C ablesen, und wenn C an B vorbeifliegt, kann B die Zeit von C ablesen.

Sehen wir dagegen C als ruhend an, so fliegen nacheinander **zwei** unterschiedliche, **sich bewegende** Uhren (A und B) an der **einen, ruhenden** Uhr C vorbei. C kann zwar jede einzelne Uhr ablesen, kann jedoch nicht feststellen, ob A und B synchron laufen. Wir werden jetzt erklären, warum die beiden Uhren A und B zwar im Bahnhofsystem synchron laufen, aber im Zug-Inertialsystem eben nicht synchronisiert sind:

Betrachte das ruhende Bahnsteigsystem. Genau in der Mitte zwischen A und B wird ein Lichtblitz gezündet, der gleichzeitig bei A und B ankommt, um diese Uhren zu starten. Begründung: Der anfängliche Abstand zwischen dem Mittelpunkt von A und B und diesen beiden Uhren bleibt während des ganzen Vorgangs exakt identisch.

Betrachte nun den Fall, dass das Zugsystem ruht und der Bahnsteig sich mit der Geschwindigkeit v nach links bewegt. Der Lichtblitz wird wieder genau in der Mitte von A und B gezündet. Aber nun bewegt sich A von diesem anfänglichen Zündungspunkt weg und B bewegt sich auf den anfänglichen Zündungspunkt zu. Natürlich erreicht der Lichtstrahl zuerst B und später A. Die Uhr B wird also eher gestartet und ist nicht synchron mit der Uhr A.

Zumindest ist jetzt schon klar, dass der obige Gedankenversuch nicht symmetrisch bezüglich der beiden Inertialsysteme (Zug und Bahnsteig) ist!

Es wird sich bald zeigen, dass hier die Lösung des scheinbaren Widerspruches zu finden ist.

Die bisherigen Überlegungen beziehen sich nur auf Lichtuhren. Es stellt sich die Frage, wie sich bewegte mechanische und elektrische Uhren verhalten. Unterliegen auch sie der Zeitdilatation? Gehen alle Uhren, also auch Atomuhren, nach der gleichen Gesetzmäßigkeit langsamer, wenn sie bewegt werden? Die Antwort lautet: ja!

Baue in die obigen Uhren A, B und C jeweils eine mechanische Zusatzuhr A‘, B‘ und C‘ ein. Diese mechanischen Uhren sollen mit ihren entsprechenden Lichtuhren synchronisiert sein. Dann müssen sie logischerweise auch immer dieselben Zeiten wie ihre zugehörigen Lichtuhren anzeigen.

Für die Bestätigung der Relativitätstheorie ist der Zerfall instabiler Elementarteilchen (analog zu radioaktiven Atomen) eine besonders wichtige Uhr. Man hat experimentell nachgewiesen, dass die Halbwertszeit und damit auch die durchschnittliche Lebensdauer von instabilen Teilchen stark zunimmt, wenn diese sich mit fast Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Man kann auch Lebewesen als biologische Uhren ansehen. Betrachte etwa die Jahresringe eines Baumes oder das Gebiss eines Pferdes. An beiden kann man das Alter erkennen. Auch an dem Aussehen eines Mitmenschen kann man dessen Alter erkennen. Offensichtlich zeigen also auch biologische Uhren den

Verlauf der Zeit an. Da sie letztlich aus Atomen aufgebaut sind, gilt auch für sie die Zeitdilatation.

Die folgenden Aufgaben befassen sich nur mit Zeitspannen bzw. Zeitdifferenzen, die im jeweiligen Inertialsystem jeweils nur an einem festen Ort vergehen.

Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind teilweise mit einem Taschenrechner nicht direkt lösbar, weil zu kleine Differenzen auftreten. Hilfreich ist dann eine Taylor-Entwicklung: $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + -........$

1. Jemand packt eine Atomuhr ins Auto und fährt nonstop mit 200 $\frac{km}{h}$ immer geradeaus von München nach Hamburg (600 km). Um wie viel bleibt seine Uhr gegenüber einer mit München synchronisierten Hamburger Uhr zurück? Von einem Einfluss der Erddrehung wird abgesehen.

2. Um wie viel ist ein Formel-I-Rennfahrer am Ende eines Rennens weniger gealtert als die Zuschauer auf den Rängen, wenn das Rennen eine Stunde dauerte und mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 280$\frac{km}{h}$ gefahren wurde?

3. Der nächste Fixstern ist α-Centauri am südlichen Sternenhimmel mit einer Entfernung von 4,5 Lichtjahren.
a) Wie lange (Erdzeit!) braucht ein Raumschiff um zu dem Stern zu gelangen, wenn seine Geschwindigkeit $v = 0{,}5\ c$ beträgt?
b) Wie lange würde der Flug für die Astronauten an Bord dauern?
c) Welche Geschwindigkeit müsste das Raumschiff auf einer anderen Reise zu einem noch weiter entfernteren Ziel haben, damit für die Besatzung nur 1 Jahr vergeht, während für die daheim gebliebenen Erdbewohner dabei ganze 9 Jahre vergehen? Wie weit wäre dann für die Erdbewohner dieses andere Ziel entfernt?

4. Mit welcher maximalen Geschwindigkeit darf man höchstens eine Atomuhr von Tokio nach Paris (rund 10 000 km) transportieren, wenn der dabei auftretende Zeitfehler kleiner als 10^{-8}s sein soll?

5. Die Erde kreist mit der Geschwindigkeit $v = 30\ \frac{km}{s}$ um die Sonne. Um wie viel wird dadurch der Uhrengang auf der Erde prozentual verlangsamt? Im Vergleich zu welchen Uhren wäre dies der Fall?

6. Astronauten benötigen für die Reise zum Mond (Entfernung 384 000 km) hin und zurück insgesamt vier Tage. Berechne daraus die Geschwindigkeit der Rakete relativ zur Erde und die auftretende Zeitdilatation!

7. Erläutere die Aussage: „Für Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, steht die Zeit still.“

Lösungen

Aufgabe 1

$$\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$
$$= 3 \cdot 3600s \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{200:3,6}{300000000}\right)^2}$$
$$= 10800s \cdot \sqrt{1 - 3,4294 \cdot 10^{-14}}$$
$$= 10800s - 10800s \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 3,429410^{-14}$$
$$\approx 10800s - 0,19ns$$

Es tritt also eine Zeitdifferenz von etwa 0,19 Nanosekunden auf.

Aufgabe 2

$$\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$
$$= 3600s \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{280:3,6}{300000000}\right)^2}$$
$$= 3600s \cdot \sqrt{1 - 6,7215 \cdot 10^{-14}}$$
$$\approx 3600s \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2} 6,7215 \cdot 10^{-14}\right)$$
$$= 3600s - 3600s \cdot \tfrac{1}{2} 6,7215 \cdot 10^{-14}$$
$$\approx 3600s - 0,121ns$$

Es tritt also eine Zeitdifferenz von etwa 0,121 Nanosekunden auf.

Aufgabe 3
a) Das Raumschiff benötigt offensichtlich 9 Jahre Erdzeit.

b)

$$\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$
$$= 9a \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0{,}5c}{c}\right)^2}$$
$$= 9a \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$$
$$\approx 7{,}794\ a$$

c) $\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

$$1a = 9a \cdot \sqrt{1 - \frac{(kc)^2}{c^2}}$$
$$\left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1 - k^2$$
$$k^2 = \frac{81-1}{81}$$
$$k = \frac{1}{9} \cdot \sqrt{80} \approx 0{,}9938$$

Sollte der Flug für die Astronauten nur 1 Jahr dauern, so müsste die Geschwindigkeit etwa 0,9938c betragen. Das neue Ziel wäre für die Erdbewohner dann s = 0,9938c·9 Jahre ≈ 8,94 Lichtjahre entfernt.

Aufgabe 4

$$\Delta t_R - \Delta t = \Delta t_R \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \approx \Delta t_R \cdot \left(1 - \left[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}\right]\right) = \Delta t_R \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{10\,000km}{v} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} < 10^{-8}s$$

$$5\,000\text{km} \cdot v < c^2 \cdot 10^{-8}\text{s}$$

$$v < 0{,}18\ \frac{km}{s} = 648\ \frac{km}{h}$$

Aufgabe 5

$$\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \Delta t_R \cdot \sqrt{1-\left(\frac{30}{300000}\right)^2} = \Delta t_R \cdot \sqrt{1-10^{-8}}$$

$$\Delta t \approx \Delta t_R \cdot (1-\frac{1}{2}\cdot 10^{-8})$$

Die Uhren auf der Erde sind also um $5\cdot 10^{-9}$ bzw. $5\cdot 10^{-7}$Prozent langsamer im Vergleich zu Uhren, die im Sonnensystem ruhen. Beispiel: Wenn im ruhenden Sonnensystem die Zeit von 1 Milliarde Jahre (=10^9Jahre) vergeht, würden auf der sich bewegenden Erde 5 Jahre weniger vergehen.

Aufgabe 6

$$v = \frac{2\cdot 384000km}{4\cdot 24\cdot 3600s} \approx 2{,}222\,\frac{km}{s}$$

$$\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= \Delta t_R \cdot \sqrt{1-\left(\frac{2{,}222}{300000}\right)^2}$$

$$\approx \Delta t_R \cdot \left[1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2{,}222}{300000}\right)^2\right] \approx \Delta t_R \cdot (1-2{,}743\cdot 10^{-11})$$

Die auftretende Zeitdilatation beträgt also
$4\cdot 24\cdot 3600s\cdot 2{,}743\cdot 10^{-11} \approx 9{,}48\mu s$

Aufgabe 7

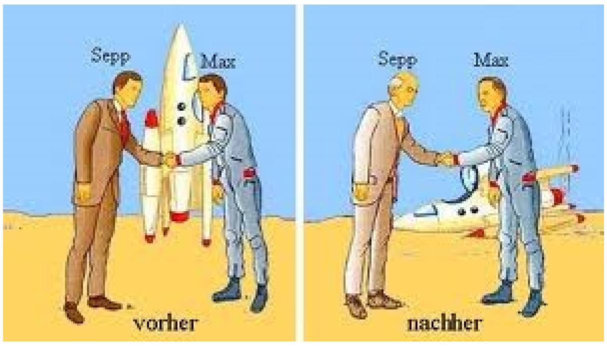
$$\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Hier gilt offensichtlich: $\lim_{v\to c} \Delta t = 0$

Das Zwillingsparadoxon

Nimm an, ein Astronaut entfernt sich mit sehr großer Geschwindigkeit von der Erde. Nachdem in seinem Raumschiff wenige Jahre vergangen sind, fliegt er wieder zurück zur Erde, weil er Sehnsucht nach seinem, auf der Erde zurück gebliebenen Zwillingsbruder hat.

Auf Grund der Zeitdilatation verläuft die Zeit des Astronauten jedoch wesentlich langsamer als auf der ruhenden Erde. Man mache sich klar, dass dies allein keinerlei persönlichen Vorteil für den Astronauten hat: Er kann während dieser Zeit nicht mehr Bücher lesen oder Musik hören als sein Bruder auf der ruhenden Erde (in derselben Zeitspanne auf der Erde).
Wenn der Astronaut wieder auf der Erde landet, wird er allerdings feststellen müssen, dass sein Zwillingsbruder um viele Jahre älter sein wird als er selbst.



Betrachten wir nun diese Beispiel mit konkreten Zahlen:
Beide Zwillingsbrüder seien beim Start der Reise 20 Jahre alt. Die Geschwindigkeit des Raumschiffes sei $v = \frac{12}{13} \cdot c$ und der Astronaut kehrt zurück, wenn auf der Erde 52 Jahre vergangen sind, der Erd-Zwillingsbruder also 72 Jahre alt ist.

Man kann nun leicht ausrechnen, wie viel Zeit inzwischen für den Astronauten während seiner Reise vergangen ist:

$$\Delta t = \Delta t_R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 52a\sqrt{1 - \frac{12^2}{13^2}} = 52a \cdot \frac{5}{13} = 20a$$

Der Astronaut ist also bei seiner Rückkehr erst 40 Jahre alt, obwohl sein Zwillingsbruder schon 72 Jahre alt ist.

Dieses Gedankenexperiment ist zwar äußerst verwunderlich, aber bis jetzt noch lange kein Grund, von einem Paradoxon zu sprechen.

Zu einem Paradoxon wird dieses Gedankenexperiment erst, wenn man das Ganze aus der Sicht des Systems betrachtet, in dem sich der Astronaut befindet. Für den Astronauten sieht es nämlich so aus, als würde sich die Erde zunächst von der ruhenden Raumkapsel entfernen und sich ihr später wieder annähern.

Demzufolge müssten die gerade angestellten Überlegungen als Konsequenz haben, dass die Altersangaben gerade umgekehrt sind: Der Astronaut müsste nach der Reise 72 Jahre alt sein und sein Erd-Zwillingsbruder nur 40 Jahre.

Diese Folgerung ist jedoch falsch. Wir können sofort einsehen, dass sich die beiden Zwillingsbrüder nämlich nicht symmetrisch gleich verhalten. Während der eine Zwillingsbruder auf der Erde, zumindest näherungsweise, stets in einem Inertialsystem ruht, ist das bei dem anderen nicht der Fall.

Zunächst mal zu der Aussage, der Erd-Zwilling ruhe näherungsweise in einem Inertialsystem: Bekanntlich rotiert unsere Erde mit rund 30 $\frac{km}{s}$ um unsere Sonne. Das erscheint erst mal nicht wenig zu sein. Andererseits bewegt sich der Astronaut mit $v = \frac{12}{13} \cdot c \approx 277000 \frac{km}{s}$ von der Erde weg. Damit verglichen befindet sich unsere Erde nahezu in Ruhe. Die Abweichungen von einem Ruhesystem sind praktisch völlig vernachlässigbar.

Der Astronaut muss während seiner Reise wenigstens einmal abgebremst und wieder beschleunigt werden, um an seinen Ausgangspunkt zurückzukehren. Er bewegt sich also zunächst mit $277000 \frac{km}{s}$ in die eine Richtung und anschließend mit der betragsmäßig gleichen Geschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung. Dabei verlässt er das Inertialsystem, in dem er während der Hinreise ruht. Seine Uhren zeigen daher nicht die Zeit **eines** Inertialsystems an, von dem aus betrachtet, man den Bruder auf der Erde als bewegt ansehen könnte.

Welches System (das Erdsystem oder das Raumschiffsystem) nun wirklich in Ruhe ist oder zumindest eine konstante Geschwindigkeit besitzt, lässt sich leicht überprüfen: Im Raumschiff könnte man im Aufenthaltsraum der Astronauten einen Ball irgendwo in der Luft positionieren. Er würde wegen der Schwerelosigkeit (bei konstanter Geschwindigkeit) an dieser Stelle verharren. Sollte er nach dem Loslassen gegen irgendeine Wand prallen, so weiß man: Das Raumschiff wird gerade gebremst bzw. beschleunigt.

In seiner allgemeinen Relativitätstheorie (siehe Skript, weiter hinten!) zeigt Albert Einstein, dass Beschleunigung auf einen Körper dieselbe Wirkung hat wie Gravitation. Weiterhin zeigt Einstein, dass Gravitation den Zeitverlauf ebenfalls verlangsamt. Wenn also ein Körper sehr stark beschleunigt (bzw. gebremst) wird, vergeht die Eigenzeit des Körpers sehr viel (das hängt natürlich noch von dem Wert der Beschleunigung ab) langsamer als für nicht beschleunigte Körper.

Zusammengefasst: Wenn der Astronaut auf dem Hinweg mit konstanter Geschwindigkeit fliegt, vergeht seine Zeit langsamer als bei seinem Erdzwilling. Wenn er für das Wendemanöver abbremst, vergeht seine Zeit langsamer. Wenn er für den Rückflug beschleunigt, vergeht seine Zeit langsamer. Auf dem Rückflug mit konstanter Geschwindigkeit vergeht seine Zeit ebenfalls langsamer.

Aufgaben

1. Ein Astronaut tritt mit 25 Jahren eine Weltraumreise an, die ihn mit $v = \frac{12}{13} \cdot c$ durch das All führt. Bei der Rückkehr ist sein Zwillingsbruder 64 Jahre. Wie alt ist dann der Astronaut?

2. Ein Raumschiff entfernt sich mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}6\ c$ von der Erde. Nachdem an Bord 16 Jahre vergangen sind, kehrt das Raumschiff mit $v = 0{,}8\ c$ zur Erde zurück.
a) Welche Zeit ist zwischen Abflug und Ankunft auf der Erde vergangen?
b) Welche Zeit ist währenddessen im Raumschiff vergangen?

Lösungen

Aufgabe 1

$$\boldsymbol{\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 39a \cdot \sqrt{1 - \frac{12^2}{13^2}} = 39a \cdot \frac{5}{13} = 15a}$$

Der Astronaut ist dann 25+15 = 40 Jahre alt

Aufgabe 2

$$\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$16a = \Delta t_R \cdot \sqrt{1 - 0{,}6^2} = \Delta t_R \cdot 0{,}8$$

$$20a = \Delta t_R$$

Nach 20 Jahren Erdzeit beginnt der Rückflug des Raumschiffes. Während dieser gesamten Zeit haben die Erdbewohner das Raumschiff beobachtet, welches sich mit 0,6c von der Erde fortbewegte. In dieser Zeit hat es also 20a · 0,6c = 12 Lj zurückgelegt.

Übrigens: die Raumfahrer haben sich in ihrer Zeit 16 Jahre lang mit 0,6c bewegt. Sie haben also ihrer Meinung nach 16a · 0,6c = 9,6 Lj zurückgelegt. In den unterschiedlichen Inertialsystemen sind also identische Strecken auch unterschiedlich lang. Dazu mehr im übernächsten Kapitel!

Die Erdbewohner beobachten anschließend den Rückflug des Raumschiffes, welches sich mit 0,8c auf die Erde zu bewegt, und sie stellen fest, dass das Raumschiff nach weiteren $\frac{12Lj}{0{,}8c}$ = 15 Jahre Erdzeit landet.

Für die Erdbewohner vergehen also während des gesamten Hin- und Rückfluges insgesamt 35 Erdjahre.

Man kann nun leicht ausrechnen, wie viel Zeit im Raumschiff während dieser letzten 15 Erdjahre vergeht:

$$\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 15a \cdot \sqrt{1 - 0{,}8^2} = 15a \cdot 0{,}6 = 9a$$

Im Raumschiff vergehen als während des Hin- und Rückfluges insgesamt 25 Jahre.

IV. Relative Gleichzeitigkeit

Albert Einstein entdeckte auch, dass man die Gleichzeitigkeit zweier örtlich entfernter Ereignisse definieren muss, da es – wie wir sehen werden – keinesfalls selbstverständlich ist, was unter diesem Begriff zu verstehen ist. Sehr wichtig war ja zum Beispiel die Synchronisation der Uhren A und B im anfänglichen Gedankenversuch. Wir hatten schon gezeigt, dass die beiden Uhren A und B zwar im Bahnsteigsystem synchron waren, aber im Zugsystem eben nicht. Das wollen wir jetzt nochmal etwas genauer untersuchen.

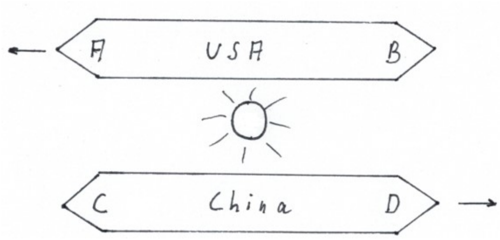
Es gibt zwei mögliche, äquivalente Definitionen:

Zwei Ereignisse sind gleichzeitig, wenn von ihnen ausgehende Licht- oder Radiosignale einen in der Mitte befindlichen Beobachter zugleich (d.h. im gleichen Moment bzw. zum gleichen Zeitpunkt) erreichen.

Zwei Ereignisse sind gleichzeitig, wenn sie von Licht- oder Radiosignalen ausgelöst werden, die zugleich von einer Quelle in ihrer Mitte ausgehen.

Dass in beiden äquivalenten Definitionen die Lichtgeschwindigkeit benutzt wurde, liegt daran, dass in allen Inertialsystemen die Lichtgeschwindigkeit denselben Wert besitzt.

Für die folgenden Überlegungen nehmen wir an, ein amerikanisches und ein chinesisches Raumschiff begegnen sich im Weltall. Beide Raumschiffe seien baugleich und daher gleich lang. Im amerikanischen Raumschiff befinden sich vorne und hinten die beiden Lichtuhren A und B; im chinesischen Raumschiff befinden sich hinten und vorne die beiden Lichtuhren C und D. Das amerikanische Raumschiff bewege sich nach links, das chinesische nach rechts. Man versucht nun, diese vier Uhren gleichzeitig in Gang zu setzen. Wir werden sehen, dass dies äußerst problematisch ist.



Der Versuch läuft folgendermaßen ab: Befinden sich beide Raumschiffe, die mit halber Lichtgeschwindigkeit aneinander vorbeifliegen, exakt nebeneinander, so soll in der Mitte der beiden Raumschiffe eine Blitzlampe gezündet werden. Das Lichtsignal läuft zu allen Uhren und setzt sie in Gang.

Wir betrachten zunächst den Ablauf des Experimentes, wie es sich aus amerikanischer Sicht darstellt. Ruht das amerikanische Raumschiff, dann erreichen die nach vorn und hinten laufenden Lichtsignale gleichzeitig die Uhren A und B im amerikanischen Raumschiff. Das chinesische Raumschiff hat sich jedoch in der Zwischenzeit weiterbewegt, so dass der Lichtblitz die Uhr C am linken Ende des chinesischen Schiffes schon früher erreicht hat. Die chinesische Uhr D rechts wird hingegen zuletzt in Gang gesetzt (erst nachdem die beiden amerikanischen Uhren A und B gestartet wurden).

Die Reihenfolge des Startens der Uhren sieht also aus amerikanischer Sicht so aus (wobei in der Skizze von links nach rechts die Zeit verläuft):

```
     A
C         D
     B
```

Die amerikanischen Uhren sind synchronisiert und die chinesischen Uhren gehen falsch.

Aus chinesischer Sicht betrachtet ruht allerdings das chinesische Raumschiff und der Fall stellt sich gerade umgekehrt dar:

```
     C
B         A
     D
```

Die chinesischen Uhren sind synchronisiert und die amerikanischen Uhren gehen falsch.

Da die Inertialsysteme, in denen die chinesische und die amerikanische Rakete ruhen, gleichberechtigt sind, gibt es keinen Grund, der einen oder anderen Seite Recht zu geben. Es folgt vielmehr:

Örtlich getrennte Ereignisse, die in einem Inertialsystem gleichzeitig sind, finden in einem anderen Inertialsystem nicht gleichzeitig statt.
Betrachte dazu die Reihenfolge der Uhren A und B sowohl aus amerikanischer als auch aus chinesischer Sicht! Die beiden Uhren stehen an verschiedenen Orten.

Genauso wichtig und erstaunenswert ist die Tatsache, dass **die zeitliche Reihenfolge der Ereignisse (= Ingangsetzen der Uhren) vertauscht ist.**
Betrachte dazu die Reihenfolge der Uhren A und D sowohl aus amerikanischer als auch aus chinesischer Sicht!

Eine interessante Frage wäre, ob es ein Inertialsystem gibt, in welchem Ursache und Wirkung vertauscht sind. Gibt es ein Inertialsystem, in welchem eine Fensterscheibe zuerst zersplittert und dann von einem Stein getroffen wird? Interessant wäre es, wenn man erst das Ergebnis einer Lottoziehung erfahren könnte, bevor man den ausgefüllten Lottoschein abgeben muss.
Leider – oder auch zum Glück – wird sich später herausstellen, dass in keinem Inertialsystem Ursache und Wirkung vertauscht werden können. Nur zwei

voneinander unabhängige Ereignisse können in der zeitlichen Reihenfolge variieren.

Sehr interessant ist auch die Formulierung, dass sich die Blitzlampe „in der Mitte“ der beiden Raumschiffe befinden soll. Der Ort der Blitzlampe in dieser „Mitte“ bleibt für das ruhende System konstant, für das sich bewegende System hingegen nicht.

V. Längenkontraktion

Jeder LKW-Fahrer weiß, welche Länge sein Lastzug hat. Sie steht in den Fahrzeugpapieren. Wollte er sie während der Fahrt ohne Metermaßstab nachprüfen, so könnte er im Prinzip so vorgehen: Er stoppt die Zeit, die es dauert, bis der LKW an einem Markierungspfahl der Straße vorbeigefahren ist. Er multipliziert dann diese Zeit mit der am Tacho abgelesenen Geschwindigkeit und erhält so die Länge seines LKW.

Die Polizei am Straßenrand will auch die Länge des LKW messen. Sie ermittelt mit Radar die Geschwindigkeit. Zusätzlich stoppt sie mit ihrer Uhr die Zeit der Vorbeifahrt und ermittelt ebenfalls die Länge durch Multiplikation von Geschwindigkeit und Zeit.

Interessanterweise kommen der LKW-Fahrer und die Polizei zu unterschiedlichen Ergebnissen. Um dies zu verstehen, untersuchen wir die Sachlage genauer:

Wir versetzen uns in das Ruhesystem des LKW-Fahrers. Der LKW ruht also und die Fahrbahn und der Bürgersteig bewegen sich mit der Geschwindigkeit v am LKW vorbei. Am LKW ist an beiden Stoßstangen vorne und hinten jeweils eine Uhr angebracht. Diese beiden Uhren sind natürlich für den LKW-Fahrer synchronisiert. Dieser liest nun jeweils die beiden Zeitpunkte ab, zu denen der Markierungspfahl an der vorderen bzw. hinteren Stoßstange vorbeikommt. Eventuell hilft ihm dabei sein Beifahrer. Die Zeitdifferenz sei Δt_R .

Die Polizei hingegen misst die entsprechende Zeitdifferenz Δt mit einer einzigen, am LKW vorbeifliegenden Uhr. Der Sachverhalt ist also völlig äquivalent zu unserem im Anfang des Kapitels III beschriebenen Uhrenproblem mit den drei Uhren A, B und C. Deshalb können wir auch sofort das entsprechende Ergebnis übernehmen. Es gilt also:

$$\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Multipliziert man nun beide Seiten mit der Geschwindigkeit v, so folgt für die Länge l des Lastzuges

$$l = l_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dies bedeutet nun: Die Polizei misst den LKW kürzer als er in seinem Ruhesystem ist. Verallgemeinert bedeutet dies:

Ein sich mit der Geschwindigkeit v bewegender Körper erscheint (verglichen mit **seinem** Ruhesystem**) verkürzt.** Man nennt diesen Sachverhalt ***Lorentz-Kontraktion*** *(Hendrik Lorentz, niederländischer Physiker, 1853 bis 1928).*

Bemerkung: Bei der Herleitung gingen wir davon aus, dass sich der Körper nur in x-Richtung bewegt. Diese Voraussetzung ist durch passende Wahl der Achsen immer erfüllbar.
In y- und z-Richtung messen dann alle Beobachter die gleiche Ausdehnung für einen Körper, weil in diese beiden Richtungen keine Bewegung verläuft.

Beispiel:
Ein Raumschiff fliegt von der Erde aus mit v = 0,8c zu einem Stern, welcher 48 LJ von der Erde entfernt ist. Wenn das Schiff am Zielstern angekommen ist, sind auf der Erde genau 60 Jahre vergangen (nachrechnen!). An Bord des Schiffes sind jedoch aufgrund der Zeitdilatation nur 36 Jahre vergangen (nachrechnen!).

Die Bordbesatzung erklärt sich den Zeitgewinn jedoch anders. Für sie steht ihr Raumschiff still und der Zielstern nähert sich mit v = 0,8c dem Raumschiff. Der Abstand zu dem Raumschiff reduziert sich damit aufgrund der Längenkontraktion auf 28,8 LJ (nachrechnen!). Dieser Abstand wird aber bei der Geschwindigkeit von 0,8c innerhalb von 36 Jahren überbrückt.

Aufgaben

1. Myonen sind einfach negativ geladene Elementarteilchen, die etwa in 20 km Höhe durch kosmische Strahlung erzeugt werden. Sie wurden 1936 erstmalig entdeckt. Ihre Masse ist etwa 207 Mal so groß wie die Elektronenmasse. Myonen sind instabil, d.h. sie zerfallen mit einer Halbwertszeit von ungefähr 1,52 µs und ihre durchschnittliche Lebensdauer beträgt etwa 2,2 µs. Mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}9998 \cdot c$ fliegen sie auf die Erde zu.
Wie stark ist im Ruhesystem der Myonen die Höhe H = 20 km kontrahiert?

2. In einem Teilchenbeschleuniger wird ein Elektron auf die Geschwindigkeit $v = 0{,}6c$ beschleunigt. Anschließend durchfliegt es mit konstanter Geschwindigkeit eine Strecke AB von 9m Länge im Laborsystem.
a) Wie lange (Laborzeit) braucht das Elektron, um diese Strecke zu durchfliegen?
b) Welche Zeit vergeht dafür im Ruhesystem des Elektrons?
c) Wie groß ist die Strecke AB für das Elektron?

3. Die folgende Aufgabe gibt es in verschiedenen Textversionen. Die Problematik ist in jeder Version dieselbe und wird als Paradoxon bezeichnet:

Die Alien-Kampfverbände haben einen neuen 26m langen eisernen Superflugpanzer erhalten, der eine Geschwindigkeit von $\frac{12}{13}c$ erreicht. Mit diesem Panzer sollen die gegnerischen Stellungen erobert werden. Die Erdbewohner haben zu ihrer Verteidigung im Raum 13m breite „Supergräben" gezogen, in die jeder Gegenstand, der kleiner als 13m ist, hineingezogen wird. Die Erdbewohner glauben, dass die Panzer dort hineinfallen werden. Die Aliens hingegen glauben, dass der Graben viel zu klein für ihre Panzer ist. Wer wird die Schlacht gewinnen?
Zur Vorsorge haben die Erdbewohner noch einen sehr starken Elektromagneten im Graben eingebaut, der eingeschaltet werden soll, wenn sich der Panzer über dem Graben befindet, und der natürlich jeden eisernen Gegenstand, welcher kleiner als 13m ist, in den Graben hineinzieht.
Was wird passieren? Natürlich kann es nur ein Ergebnis geben, welches unabhängig davon sein muss, in welchem Inertialsystem es betrachtet wird.

Lösungen

Aufgabe 1

$l = l_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Die Myonen werden in 20km (bzgl. des ruhenden Erdsystems) Höhe erzeugt. Vom Ruhesystem der Myonen aus betrachtet bewegt sich die Erdoberfläche mit v= 0,9998·c auf die ruhenden Myonen zu. Für das Ruhesystem der Myonen verkürzen sich damit die oben angegebenen 20km gemäß obiger Formel auf

$l = 20km \cdot \sqrt{1 - 0{,}9998^2} = 0{,}39998km \approx 400m$

Zusatzrechnung: Mit der durchschnittlichen Lebensdauer von 2,2µs und der Geschwindigkeit 0,9998·c können die Myonen in ihrem eigenen Ruhesystem etwa 660m weit fliegen.
Interessant ist, dass die Myonen nur aufgrund der Längenkontraktion die (im Erdsystem) 20km bis zur Erdoberfläche überwinden können.

Aufgabe 2

a) $t = \frac{s}{v} = \frac{9m}{0{,}6 \cdot 300000000\frac{m}{s}} = 50ns$

b) $\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 50ns \cdot \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 50ns \cdot 0{,}8 = 40ns$

c) $l = l_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 9m \cdot \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 9m \cdot 0{,}8 = 7{,}2m$

Aufgabe 3

Für die Erdbewohner haben die anfliegenden Panzer eine Länge von

$l = l_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 26m \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = 26m \cdot \frac{5}{13} = 10m$

Die Panzer müssen also aus Sicht der Erdbewohner in die „Supergräben“ fallen.

Für die Aliens haben die ihnen entgegenkommenden „Supergräben“ allerdings nur eine Länge von $l = l_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 13m \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = 13m \cdot \frac{5}{13} = 5m$

Die Gräben sind also aus Sicht der Aliens deutlich kleiner als ihre 26m langen Panzer.

Es sollen hier nur weitere Betrachtungen zur Problematik vorgestellt werden:

1. Die Gleichzeitigkeit ist nicht in beiden Inertialsystemen identisch. Das bedeutet, wenn sich im „Erdsystem" der Panzer direkt über dem Graben befindet (d.h. Bug und Heck befinden sich gleichzeitig über dem Graben), so gilt diese Aussage nicht für das „Aliensystem".
   Im „Aliensystem" werden sich Bug und Heck des Panzers niemals gleichzeitig über dem Graben befinden.

Dies allein klärt die Sachlage noch nicht auf. Die unterschiedlichen Zeiten werden jedoch wichtig, wenn man alle Einzelheiten dieser Aufgabe in beiden Systemen genau berechnen will.

Zu berücksichtigen bei dieser Problematik ist auch folgende, bisher noch nicht erwähnte, physikalische Erkenntnis:

2. Es gibt in der Relativitätstheorie keine „starren Körper".
   Was bedeutet dies? Folgendes Beispiel soll dies verdeutlichen:
   Wenn man am linken Ende einer 10m langen Eisenstange zieht (z.B. durch Einschalten eines Magnetfeldes links von der Eisenstange), so bewegt sich in unserem Alltag nicht nur das linke Ende, sondern <u>praktisch gleichzeitig</u> auch das rechte Ende der Stange.

Eine genauere Betrachtung ergibt jedoch folgendes Bild: Zunächst bewegt sich das erste Atom (oder die erste, dem Magneten am nahesten gegenüberliegende Atomschicht) nach links. Dieses erste Atom zieht das zweite Atom minimal zeitversetzt hinter sich her, dieses wiederum zieht zeitversetzt das dritte Atom hinter sich her usw.
Weil die Bindungskräfte zwischen den einzelnen Atomen der Eisenstange sehr groß sind, ist diese Zeitversetzung in unserem Alltag derart klein, dass wir sie nicht bemerken (im Alltag ist die Eisenstange starr). Das ändert aber nichts daran, dass diese Zeitversetzung existiert. Mit welcher Geschwindigkeit sich die nach links gerichtete Bewegung der Atome im Eisenstab nach rechts hin ausbreitet, hängt vom Material der Stange ab. Auf jeden Fall (was für eine exakte Rechnung wichtig ist) ist diese Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Wirkung kleiner als die Lichtgeschwindigkeit.
Dies bedeutet, dass die Eisenstange kurzzeitig etwas ihre Form ändert, übertrieben gesagt: Die Eisenstange zerfließt.

Was bedeutet dies für obige Panzerschlacht zwischen Erdlingen und Aliens? Sobald der Panzer sich (im „Erdsystem") komplett über dem Graben befindet, wird er in den Graben hinein gezogen. Der Panzer „zerfließt" dabei.

3. Wie wird festgestellt, ob der Panzer sich komplett über dem Graben befindet? Diese Feststellung funktioniert auch nicht in Null-Zeit!

VI. Koordinatenumrechnungen

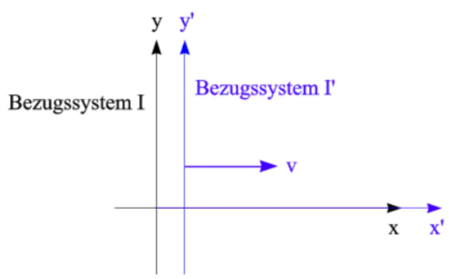
Bisher haben wir nur Zeitdifferenzen und Längen von einem Inertialsystem ins andere und umgekehrt berechnen können. Nun werden wir Formeln herleiten zur Umrechnung von Zeitpunkten und Ortskoordinaten.

Im Folgenden betrachten wir ein und dasselbe Ereignis vom Inertialsystem I aus und von einem relativ dazu bewegten Inertialsystem I' aus. In diesem Zusammenhang sind für uns nur die Ortskoordinaten und der Zeitpunkt des Ereignisses relevant. Es ist klar, dass die Koordinaten eines Ereignisses (Orts- und eventuell auch Zeitkoordinaten) in den beiden Systemen unterschiedlich sind.

A. Die Galilei-Transformation

Wir wollen den Zusammenhang zwischen diesen Koordinatenwerten zunächst auf der Grundlage der klassischen Mechanik bestimmen. Die zugehörige Umrechnung wird als ***Galilei-Transformation*** bezeichnet. Die Existenz der **absoluten Zeit** führt hier sofort auf $t = t'$, so dass wir die Beziehung der Zeitkoordinaten bereits kennen.

Welche Gleichungen folgen für die drei Raumkoordinaten? Um das Problem rechnerisch zu vereinfachen, wollen wir hier und auch später bei der relativistischen Behandlung stets von folgenden Annahmen ausgehen:



1. Die drei räumlichen Koordinaten sollen rechtwinklig aufeinander stehen.
2. Die einander entsprechenden Achsen zweier Inertialsysteme, z.B. die x- und die x'-Achse sind parallel zueinander.
3. Zur Zeit $t = t' = 0$ soll der Ursprung des einen Systems mit dem des anderen zusammenfallen.
4. Die Bewegung der Bezugssysteme soll immer in Richtung der x-Achse erfolgen. Das ist keine Einschränkung, weil man stets die x-Achse in die Bewegungsrichtung legen kann.

Das gestrichene Bezugssystem bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in Richtung der positiven x-Achse. Die beiden parallelen z- bzw. z'-Achsen sind nicht eingezeichnet.

Man erhält aus obigem Bild: $y' = y$ und $z' = z$
Für die x-Koordinate lesen wir ab: $x' = x - v \cdot t$ bzw. $x = x' + v \cdot t$

Ein Körper, der sich im System I mit der Geschwindigkeit u bewegt, besitzt in I' die Geschwindigkeit $u' = u - v$
Dies ist erstens anschaulich klar und zweitens folgt es auch durch Differentiation der Gleichung $x' = x - v \cdot t$

Somit folgt z.B. auch für die Lichtgeschwindigkeit in den beiden Systemen:
$c' = c - v$ d.h. $c' \neq c$

Das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist also in der Galilei-Transformation nicht enthalten.

Die folgenden zusammengefassten Gleichungen bezeichnet man als ***Galilei-Transformation.***

$\mathbf{t' = t}$	$\mathbf{t = t'}$
$\mathbf{x' = x - v \cdot t}$	$\mathbf{x = x' + v \cdot t}$
$\mathbf{y' = y}$	$\mathbf{y = y'}$
$\mathbf{z' = z}$	$\mathbf{z = z'}$
$\mathbf{u' = u - v}$	$\mathbf{u = u' + v}$

Diese ***Galilei-Transformation*** gilt nur für Geschwindigkeiten, die sehr klein sind verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit. Für größere Geschwindigkeiten ist die Galilei-Transformation also falsch. Unsere Aufgabe ist es nun, eine neue und richtige Koordinatentransformation zu finden.

Da die Galilei-Transformation für kleine Geschwindigkeiten ($v \ll c$) allerdings seit Jahrhunderten sehr gute und physikalisch richtige Ergebnisse liefert, müssen wir von der neuen Umrechnung – der sog. ***Lorentz-Transformation*** – verlangen, dass sie für kleine Geschwindigkeiten praktisch identisch ist mit der Galilei-Transformation.

B. Die Lorentz-Transformation

Wir werden nun versuchen, auch das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zu berücksichtigen, indem wir in die Galilei-Transformation einen Korrekturfaktor γ einfügen, wobei wir uns zunächst auf eine Raumdimension beschränken. Dieser Korrekturfaktor γ sollte derselbe sein, egal ob man vom System I zum System I' umrechnet oder umgekehrt. Das bedeutet, dass γ auch nicht vom Vorzeichen der relativen Geschwindigkeit abhängen kann. Außerdem sollte γ für kleine Geschwindigkeiten (verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit) ziemlich genau den Wert 1 haben. Es sollte aber klar sein, dass γ auf jeden Fall irgendwie von der Geschwindigkeit v abhängen wird.

Um nun die Transformationsgleichungen auch für größere Geschwindigkeiten zu finden, macht man den folgenden Ansatz (zunächst nur für die x-Dimension). Man übernimmt die Gleichungen der Galilei-Transformation und versieht sie mit einem Korrekturfaktor γ :

$x' = \gamma\cdot(x - v\cdot t)$ und $x = \gamma\cdot(x' + v\cdot t')$

Beachte, dass jetzt mit unterschiedlichen Zeitvariablen gerechnet wird.

Außerdem muss für kleine v auch t' gegen t gehen.

Wir werden den Korrekturfaktor γ nun so festlegen, dass das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erfüllt ist. Dazu führen wir die folgende Überlegung durch: Wird ein Photon zur Zeit $t = 0$ im Koordinatenursprung von I emittiert, so legt es in der Zeit t in x-Richtung den Weg $x = c\cdot t$ zurück.

Im System I' wird das Photon dann ebenfalls zur Zeit $t' = 0$ emittiert und es legt in der Zeit t' den Weg $x' = c\cdot t'$ zurück.

Setzen wir $x = c\cdot t$ und $x' = c\cdot t'$ in den Ansatz

$x' = \gamma\cdot(x - v\cdot t)$ und $x = \gamma\cdot(x' + v\cdot t')$ ein, so folgt

$ct' = \gamma\cdot(c - v)\cdot t$ und $ct = \gamma\cdot(c + v)\cdot t'$

Multiplikation dieser Gleichungen ergibt

$c^2tt' = \gamma^2\cdot(c - v)(c + v)\cdot tt'$

$$c^2 = \gamma^2\cdot(c^2 - v^2)$$

$$= \gamma^2\cdot c^2\cdot(1 - \frac{v^2}{c^2})$$

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Das andere (negative) Vorzeichen von γ würde nur bedeuten, dass die x-Achse und die x'-Achse unterschiedliche Orientierungen hätten; es würde also nur eine Spiegelung einer Koordinatenachse bedeuten.

Dieser Korrekturfaktor erfüllt die Bedingung $\gamma_{(v)} = \gamma_{(-v)}$ und nähert sich, wie gefordert, für kleine Geschwindigkeiten dem Wert 1.

Die Transformation für die Zeit erhalten wir auch aus demselben Ansatz
$x' = \gamma\cdot(x - vt)$ und $x = \gamma\cdot(x' + v\cdot t')$, wenn wir die rechte Gleichung nach t' auflösen:

$t' = \frac{1}{v}\cdot\left(\frac{x}{\gamma} - x'\right)$ und die linke Gleichung hier einsetzen:

$$= \frac{1}{v}\cdot\left(\frac{x}{\gamma} - \gamma\cdot[x - vt]\right)$$

$$= \frac{x}{v\cdot\gamma} - \frac{\gamma\cdot x}{v} + \gamma\cdot t$$

$$= \gamma\cdot\left[t - \frac{x}{v} + \frac{x}{v\cdot\gamma^2}\right]$$

$$= \gamma\cdot\left[t - \frac{x}{v}\cdot\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)\right]$$

Die letzte runde Klammer lässt sich leicht umformen: Aus $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ folgt nämlich schnell: $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$ bzw. $1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{v^2}{c^2}$

Mit dieser Kenntnis folgt sofort:

$$t' = \gamma\cdot\left[t - \frac{x}{v}\cdot\frac{v^2}{c^2}\right]$$

$$t' = \gamma\cdot\left(t - \frac{v}{c^2}\cdot x\right)$$

Durch völlig analoge Rechnung erhält man

$$t = \gamma\cdot\left(t' + \frac{v}{c^2}\cdot x'\right)$$

Für die y- und z-Richtung können wir mit einem Korrekturfaktor q entsprechende Gleichungen ansetzen: $y' = q \cdot y$ und $y = q \cdot y'$

Dieser Ansatz führt sofort zu $y' = q^2 \cdot y'$ bzw. $q = 1$
Auch hier berücksichtigen wir nur das positive Vorzeichen, da das Minuszeichen nur zu einer Achsenspiegelung führen würde.

Zusammen folgt nun die ***Lorentz-Transformation***:

$\mathbf{x' = \gamma \cdot (x - vt)}$	$\mathbf{x = \gamma \cdot (x' + vt')}$
$\mathbf{y' = y}$	$\mathbf{y = y'}$
$\mathbf{z' = z}$	$\mathbf{z = z'}$
$\mathbf{t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} \cdot x\right)}$	$\mathbf{t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} \cdot x'\right)}$

wobei $\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \frac{\mathbf{v^2}}{\mathbf{c^2}}}}$

Bemerkung: Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928) war ein niederländischer theoretischer Physiker.

Aufgaben

1. Im dritten Kapitel haben wir schon eine Formel für die Zeitdilatation Δt hergeleitet. Leite nun dieselbe Formel mit Hilfe der *Lorentz-Transformation* her.
Anleitung: Das System I' bewege sich.
Wichtig: In I' wird eine Zeitdifferenz $\Delta t' = t_2' - t_1'$ an **einer feststehenden** Uhr (d.h. $x_2' = x_1'$) gemessen. Im System I wird die Zeitdifferenz $\Delta t = t_2 - t_1$ an zwei unterschiedlichen Uhren (d.h. $x_1 \neq x_2$) gemessen.

2. Zeige, dass die Relativität der Gleichzeitigkeit auch aus der *Lorentz-Transformation* folgt. Zwei Ereignisse sollen im System I im Abstand Δx gleichzeitig erfolgen. Wie groß ist der Zeitunterschied im bewegten System I' ?

3. Ein Ereignis E_1 hat im System I die Koordinaten (x = 10 Ls; t = 10s).
Welche Koordinaten hat dieses Ereignis im System I', welches sich mit v = 0,6 c relativ zu I bewegt? Welche Koordinaten haben die Ereignisse E_2(x = 10 Ls; t = 6s), E_3(x = 10 Ls; t = 2s) und E_4(x = 0 Ls; t = 2s) ?

Vergleiche die Zeitdifferenzen zwischen E_1 und E_3 bzw. zwischen E_1‘ und E_3‘ mit den entsprechenden Differenzen zwischen E_1 und E_4 bzw. E_1‘ und E_4‘ !
Was folgt daraus?

Lösungen

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
\Delta t' &= t_2' - t_1' \\
&= \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}\cdot x_2\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}\cdot x_1\right) \\
&= \gamma\left(t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}\cdot [x_2 - x_1]\right) \quad \text{Beachte, dass } x_2 \neq x_1 \ ! \\
&= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\cdot v\cdot \Delta t\right) \\
&= \gamma\cdot\Delta t\cdot\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\
&= \Delta t\cdot\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Das Ereignis E_1 finde am Ort x_1 zur Zeit t_1 statt. Analog finde das Ereignis E_2 am Ort x_2 zur Zeit $t_2=t_1$ statt. Dabei sei $x_2 > x_1$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
t_1' - t_2' &= \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}\cdot x_1\right) - \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}\cdot x_2\right) \\
&= \gamma\left(t_1 - t_2 + \frac{v}{c^2}\cdot [x_2 - x_1]\right) \qquad \text{Mit } t_2=t_1 \text{ folgt weiter:} \\
&= \gamma\cdot\frac{v}{c^2}\cdot\Delta x \ > \ 0
\end{aligned}$$

Also ist t_1‘ > t_2‘ und damit findet E_1 im System I‘ später als E_2 statt.

Aufgabe 3

Beispielsrechnung für E_3(x = 10 Ls; t = 2s) mit v = 0,6c :

$$\mathbf{x' = \gamma(x - vt) = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}36}}\cdot(10Ls - 0{,}6c\cdot 2s) = \frac{1}{0{,}8}\cdot 8{,}8Ls = 11Ls}$$

$$\mathbf{t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}\cdot x\right) == \frac{1}{\sqrt{1-0{,}36}}\cdot\left(2s - \frac{0{,}6}{c}\cdot 10Ls\right) = \frac{1}{0{,}8}\cdot(-4s) = -5s}$$

Also gilt E_3‘(11Ls; –5s)

Analog folgt: E_1‘(5Ls; 5s), E_2‘(8Ls; 0s), E_4‘(–1,5Ls; 2,5s)

Für die geforderten zeitlichen Differenzen gilt:
$\Delta t(E_1, E_3) = 8s$ und $\Delta t'(E_1', E_3') = 10s$
$\Delta t(E_1, E_4) = 8s$ und $\Delta t'(E_1', E_4') = 2{,}5s$

Folgerung:
Wenn man Zeitspannen von einem Inertialsystem in ein anderes umrechnen will, so hängt das Ergebnis nicht nur von der Relativgeschwindigkeit v zwischen den beiden Systemen ab, sondern insbesondere auch davon, an welchen Orten die beiden Ereignisse stattfanden.

VII. Das Geschwindigkeitsadditionstheorem

Eine Formel für die relativistische Addition von Geschwindigkeiten kann sehr einfach hergeleitet werden, indem man von der Definitionsgleichung $Geschwindigkeit = \frac{Weg}{Zeit}$ ausgeht und in diese Grundgleichung setzt man die von der Lorentz-Transformation her bekannten Zusammenhänge ein.

Das System I' bewege sich mit der Geschwindigkeit v relativ zum System I (in x-Richtung).
Ein Körper bewege sich nun im System I' mit der Geschwindigkeit u' in x'-Richtung. Dann gilt $u' = \frac{x'}{t'}$. Wir berechnen nun im System I die Geschwindigkeit dieses Körpers: $u = \frac{x}{t}$

Mit der Lorentz-Transformation $x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t')$ und $t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2})$ folgt daraus:

$$u = \frac{\gamma \cdot (x' + v \cdot t')}{\gamma \cdot \left(t' + \frac{v \cdot x'}{c^2}\right)} = \frac{x' + v \cdot t'}{t' + \frac{v \cdot x'}{c^2}} = \frac{\frac{x'}{t'} + v}{1 + \frac{x'}{t'} \cdot \frac{v}{c^2}} = \frac{u' + v}{1 + u' \cdot \frac{v}{c^2}}$$

Würde sich der Körper in y- oder z-Richtung bewegen, so ergäben sich etwas andere Gleichungen, weil zwar die Wegstrecke gleich bleibt, aber immer noch die Zeitdilatation vorhanden ist. Dies wollen wir hier jedoch nicht weiter untersuchen.

Das relativistische Additionstheorem der Geschwindigkeiten enthält das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Beispiel: Ein Raumschiff entfernt sich mit (fast) Lichtgeschwindigkeit von der Erde (also v = c) und sendet dabei Lichtstrahlen aus (u' = c). Die Geschwindigkeit dieser Lichtstrahlen für einen auf der Erde ruhenden Beobachter ergibt sich damit zu:

$$u = \frac{u' + v}{1 + u' \cdot \frac{v}{c^2}} = \frac{c + c}{1 + c \cdot \frac{c}{c^2}} = \frac{2c}{1 + 1} = c$$

Es soll hier nur erwähnt werden, dass Beschleunigungen in verschiedenen Inertialsystemen ebenfalls unterschiedliche Werte haben. Das liegt daran, dass einerseits die Geschwindigkeiten in den beiden Systemen unterschiedlich sind und andererseits auch die für die Beschleunigung gemessene Zeiten unterschiedliche Werte haben.

Aufgaben

1. Ein Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von 1 000 $\frac{km}{h}$ und feuert in Vorausrichtung ein Geschoss mit ebenfalls 1 000 $\frac{km}{h}$ ab. Welche Geschwindigkeit hat das Geschoss relativ zur Erde?
Hinweis: Für kleine Werte von x gilt näherungsweise $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$

2. Zwei Raumschiffe fliegen mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 0{,}8c$ und $v_2 = 0{,}7c$ in entgegengesetzter Richtung an der Erde vorbei. Mit welcher Geschwindigkeit entfernen sich die beiden Raumschiffe voneinander?

3. Ein radioaktiver Kern fliegt mit einer Geschwindigkeit von v = 0,5c in x-Richtung. In seinem Ruhesystem sendet er Elektronen mit einer Geschwindigkeit von 0,6c aus. Welche Geschwindigkeit haben die Elektronen im Laborsystem, wenn sie im Ruhesystem des Kerns
a) in positiver x-Richtung
b) in negativer x-Richtung emittiert werden?

Lösungen

Aufgabe 1

$$u = \frac{u'+v}{1+u'\cdot\frac{v}{c^2}} = \frac{1000\frac{km}{h}+1000\frac{km}{h}}{1+1000\frac{km}{h}\cdot\frac{1000\frac{km}{h}}{c^2}} = \frac{2000\frac{km}{h}}{1+\frac{10^6}{(3\cdot10^5\cdot3600)^2}} = 2000\frac{km}{h}\cdot\frac{1}{1+8{,}573\cdot10^{-13}}$$

$$u \approx 2000\frac{km}{h}\cdot(1-8{,}573\cdot10^{-13}) \approx 2000\frac{km}{h} - 1{,}7\frac{\mu m}{h}$$

Aufgabe 2

Man versetze sich in das Ruhesystem des nach links fliegenden Raumschiffes. Für dieses gilt: Die Erde entfernt sich mit v=0,8c und schickt ein zweites Raumschiff mit u‘=0,7c nach rechts.

$$u = \frac{u'+v}{1+u'\cdot\frac{v}{c^2}} = \frac{0{,}7c+0{,}8c}{1+0{,}7c\cdot\frac{0{,}8c}{c^2}} = \frac{1{,}5c}{1+0{,}56} \approx 0{,}962c$$

Aufgabe 3

a) $u = \frac{u'+v}{1+u'\cdot\frac{v}{c^2}} = \frac{0{,}6c+0{,}5c}{1+0{,}6c\cdot\frac{0{,}5c}{c^2}} = \frac{1{,}1c}{1+0{,}3} \approx 0{,}846c$

b) $u = \frac{u'+v}{1+u'\cdot\frac{v}{c^2}} = \frac{-0{,}6c+0{,}5c}{1-0{,}6c\cdot\frac{0{,}5c}{c^2}} = \frac{-0{,}1c}{1-0{,}3} \approx -0{,}143c$

VIII. Optischer Doppler-Effekt

Wenn sich ein Schall- oder Lichtsender relativ zu einem Empfänger bewegt, so registriert der Empfänger eine andere Frequenz als der Sender ausstrahlt. Diesen Effekt (zumindest den akustischen Teil) hat erstmalig der Österreicher Christian Doppler (1803 bis 1853) beschrieben und erklärt.

Obwohl der akustische und der optische Dopplereffekt einander sehr ähnlich zu sein scheinen, so erhält man doch unterschiedliche Formeln. Das liegt daran, dass der Schall an ein Medium gebunden ist und das Licht nicht. Die Relativgeschwindigkeit zwischen den sich fortbewegenden Schallwellen (das ist nicht die Geschwindigkeit des Senders!) und dem Empfänger hängt davon ab, ob sich der Sender oder ob sich der Empfänger bewegt.

Beispiel: Die Schallgeschwindigkeit sei 340 $\frac{m}{s}$, ein hupendes Auto bewege sich mit 30 $\frac{m}{s}$ auf den ruhenden Empfänger zu. Dann beträgt die Relativgeschwindigkeit zwischen den Schallwellen und dem Empfänger trotzdem nur 340 $\frac{m}{s}$. Im anderen Fall, wenn sich der Empfänger mit 30 $\frac{m}{s}$ auf den ruhenden Sender zu bewegt, beträgt die Relativgeschwindigkeit zwischen den Schallwellen und dem sich bewegenden Empfänger 370 $\frac{m}{s}$.

Im optischen Fall ist die Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom gewählten Inertialsystem. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Lichtwellen dem Empfänger nähern bzw. vom Sender fortbewegen, ist in beiden Fällen exakt gleich groß, egal wer von beiden sich bewegt. Das hat erstens zur Folge, dass sich die Formeln für den optischen Doppler-Effekt von denen des akustischen Dopplereffektes unterscheiden; und zweitens, dass die Formeln für den optischen Fall sowohl dafür gelten, dass der Sender sich bewegt und der Empfänger ruht als auch für den umgekehrten Fall.

Betrachte nun eine Lichtwelle, welche von einem Stern bis zu unserer Erde gelangt. Der Stern sendet eine Welle mit der Frequenz f_S, der Periodendauer T_S und der Wellenlänge λ_S aus. Die entsprechenden Empfangsdaten auf der Erde seien f, T und λ. Außerdem entferne sich der Stern mit der Geschwindigkeit v geradlinig von der Erde weg.

Wir betrachten nun genauer eine einzige Periode der vom Stern ausgesandten Welle. Wenn der Stern still stehen würde, so würde sich die entsprechende Sinuskurve trivialerweise auf einer Länge von $T_s \cdot c$ gleichmäßig verteilen, und die dafür benötigte Zeit betrüge ebenso selbstverständlich $\frac{T_S \cdot c}{c} = T_S$.

Wenn sich der Stern hingegen mit der Geschwindigkeit v von der Erde weg bewegt, so legt der Stern innerhalb der Zeit T_S noch die Strecke $T_S \cdot v$ zurück. Eine komplette Sinusschwingung verteilt sich dann gleichmäßig auf die Strecke $T_s \cdot c + T_S \cdot v = T_s\,(c + v)$.

Da sich das Licht auch nur mit Lichtgeschwindigkeit c auf die Erde zu bewegt, wird für diese Strecke insgesamt die Zeit $\frac{T_S \cdot (c+v)}{c}$ benötigt.

Nun muss man noch den relativistischen Zusammenhang zwischen der Zeit auf der ruhenden Erde und der Zeit auf dem bewegten Stern berücksichtigen. Insgesamt folgt damit für die Periodendauer T dieser Strahlung auf der Erde:

$$T = T_S \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{c+v}{c} = T_S \cdot \frac{c+v}{\sqrt{c^2-v^2}} = T_S \cdot \frac{c+v}{\sqrt{(c+v)\cdot(c-v)}}$$

$$T = T_S \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Man erkennt, dass die Periodendauer der auf der Erde empfangenen Strahlung größer ist als die Periodendauer der vom Stern ausgesandten Strahlung (wenn sich der Stern von der Erde wegbewegt). Daher spricht man auch von einer sog. *Rotverschiebung*.

Zusammen mit den allgemeingültigen Gleichungen $f = \frac{1}{T}$, $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$ folgen sehr schnell sofort folgende Zusammenhänge zwischen den Periodendauern, Frequenzen und Wellenlängen im ruhenden Erdsystem und im sich bewegenden Sternsystem:

$$\mathbf{T = T_S \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}}$$

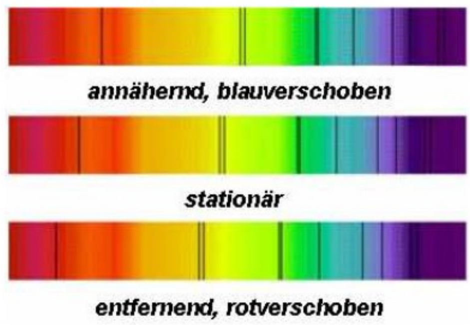
$$\mathbf{f = f_S \cdot \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}}$$

$$\boldsymbol{\lambda = \lambda_S} \cdot \mathbf{\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}}$$

Beachte: Das Frequenzverhältnis $\frac{f}{f_S}$ ist für alle Frequenzen konstant bzw. nur von der Geschwindigkeit v abhängig. Die Frequenzdifferenz $f_S - f$ ist für jede Frequenz anders.
Das Gleiche gilt für die Perioden und für die Wellenlängen.

Die obigen Formeln gelten für den Fall, dass sich Sender und Empfänger mit der Geschwindigkeit v voneinander weg bewegen. Falls sie sich aufeinander zu bewegen, ändert sich nur das Vorzeichen von v in den obigen Formeln.

Mit den obigen Formeln kann man die Relativgeschwindigkeit v zwischen einem Stern und unserer Erde berechnen. Voraussetzung ist allerdings, dass man die Frequenz f_S kennt, mit der der Stern sendet. Die auf der Erde empfangene Frequenz f kann man natürlich messen.



Wie gelangt man zur Kenntnis der Sternfrequenz f_S ?
Die Sterne enthalten z.B. Wasserstoff. Heißer Wasserstoff kann mehrere Lichtfrequenzen aussenden oder auch absorbieren. Die sog. *Balmer-Serie* enthält die im sichtbaren Bereich befindlichen Lichtfrequenzen. Diese bilden, nacheinander frequenzmäßig aufgetragen, ein bestimmtes Muster (auch intensitätsmäßig). Dieses Muster ist für ruhende Lichtquellen natürlich bekannt. Empfängt man nun auf der Erde genau dieses Muster (nur frequenzmäßig verschoben), so kann man davon ausgehen, dass die vom Stern ausgesandten Lichtfrequenzen f_S aus der Balmer-Serie des Wasserstoffs stammen.
Interessant in diesem Zusammenhang ist, dass es sehr weit entfernte Milchstraßen gibt, die sich so schnell von uns fortbewegen, dass ihr Lichtspektrum dermaßen frequenzmäßig weit „rotverschoben" bei uns auf der Erde ankommt, dass man sehr lange Zeit benötigte, bevor man endlich herausfand, wie weit sich das Original-Spektrum der Milchstraße überhaupt verschoben hatte. Diese Milchstraßen bzw. Galaxien entfernen sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit von unserer Erde.

Ein kontinuierliches Spektrum entsteht dann, wenn das Licht von glühenden festen Körpern, Flüssigkeiten oder Gasen unter hohem Druck ausgeht. So liefert z. B. das Licht einer Glühlampe ein kontinuierliches Spektrum. Ebenso liefert das Innere eines Sterns (sehr heißes Gas unter extrem hohem Druck) ein kontinuierliches Spektrum. Im äußeren Teil des Sterns nehmen die Gasdichte, der Druck und die Temperatur mit der Höhe ab. In diesem Teil werden charakteristische Lichtfrequenzen wieder absorbiert. So entsteht ein Absorptionsspektrum.
Natürlich werden die absorbierten Frequenzen auch wieder emittiert, allerdings in beliebige Richtungen, sodass nur der allergeringste Teil davon in Richtung zur Erde strahlt.

Aufgaben

1. Ein Stern sendet Licht mit der Wellenlänge $\lambda_S = 394\ nm$ aus. Auf der Erde wird allerdings die Wellenlänge $\lambda = 423$ nm gemessen. Mit welcher Geschwindigkeit v entfernt sich dieser Stern von der Erde?

2. Eine Milchstraße sendet Licht der Frequenz $6 \cdot 10^{14}$Hz aus. Sie entfernt sich von der Erde mit $v = 250\,000\ \frac{km}{s}$. Welche zugehörige Lichtfrequenz wird auf der Erde empfangen?

3. Ein Raumschiff bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v von der Erde weg und sendet ein Signal mit einer Wellenlänge von 28 *mm* zurück zur Erde. An der Empfangsstation kommt dieses Signal mit einer Wellenlänge von 29 *mm* an. Berechne die Geschwindigkeit des Raumschiffes!

4. Das menschliche Auge kann nur Lichtfrequenzen zwischen ca. $3{,}84 \cdot 10^{14}$ Hz und $7{,}89 \cdot 10^{14}$ Hz wahrnehmen.
Was ist die größte Frequenz, die eine Lampe ausstrahlen kann, sodass das Licht von einem mit 82% Lichtgeschwindigkeit davon weg bewegten Menschen noch wahrgenommen werden kann?

5. Ein Sportwagen fährt auf ein ruhendes optisches Radargerät zu. Dieses sendet ein Signal der Frequenz f_1=26 GHz aus. Der Sportwagen empfängt eine etwas erhöhte Frequenz f_2 , welche er (unter derselben Frequenz) reflektiert. Der Empfangsteil des Radargerätes misst eine nun wiederum erhöhte Frequenz f_3, welche um 4,299 kHz größer ist als f_1 .
Wie groß ist die Geschwindigkeit des Sportwagens?

6. a) Eine Ampel leuchtet rot ($\lambda = 700$ nm). Wie schnell muss man auf die Ampel zu rasen, damit sie als grün ($\lambda = 550$ nm) empfunden wird?
b) Wie schnell müsste man sich von der Ampel fortbewegen, damit im Rückspiegel das grüne Licht der Ampel rot erscheint?

7. Sie fahren in Ihrem (relativistisch schnellen) Auto auf eine Ampel zu. Die Ampel erscheint Ihnen blau ($\lambda_1 = 495$ nm). Nachdem Sie an der Ampel vorbeigefahren sind, erscheint Ihnen die Ampel im Rückspiegel rot ($\lambda_2 = 680$ nm).
a) Welche Farbe zeigte die Ampel für den neben der Ampel stehenden Polizisten an? Kann er Sie aufgrund eines Rotlichtverstoßes belangen?
b) Kann er Sie auf Grund eines Geschwindigkeitsverstoßes belangen (berechnen Sie Ihre Geschwindigkeit im System des Polizisten)?
c) Sie sind dem Polizisten gerade noch entwischt (dieser besaß kein relativistisches Gefährt) und möchten nun Ihren Lieblingssender hören

(Empfangsfrequenz ist im ruhenden Auto UKW 100,0 MHz). Auf welche Frequenz müssen Sie Ihr Radio in Ihrem relativistischen Auto einstellen, um den Sender zu empfangen, wenn Sie sich vom Sendemast weg bewegen? Welche Frequenz müssen Sie einstellen, wenn Sie sich direkt auf den Sendemast zubewegen?

Lösungen

1. $v \approx 21\,270\ \frac{km}{s}$

2. $f \approx 2{,}27 \cdot 10^{14}$ Hz

3. $v \approx 10\,523\ \frac{km}{s}$

4. $f \approx 2{,}51 \cdot 10^{15}$ Hz

5. $v \approx 24{,}3\ \frac{m}{s} \approx 87{,}6\ \frac{km}{h}$

6. a) $v \approx 70\,978\ \frac{km}{s}$

b) Ebenfalls $v \approx 70\,978\ \frac{km}{s}$

7. Es gelten folgende zwei Gleichungen:

$$495nm = \lambda_S \cdot \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

$$680nm = \lambda_S \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Aus obigem Gleichungssystem lassen sich die beiden Unbekannten berechnen: $v \approx 47\,234\ \frac{km}{s}$ und $\lambda_S \approx 580$ nm

a) Die Wellenlänge 580nm entspricht der Farbe gelb.

b) Natürlich dürften $47\,234\ \frac{km}{s}$ die Grenzen des Erlaubten überschreiten.

c) Bei der Entfernung: $f \approx 85{,}32$ MHz
Bei der Annäherung: $f \approx 117{,}2$ MHz

Weitere Effekte zur Frequenzänderung

1. Betrachte einen Stern, welcher sich nicht radial von der Erde entfernt, sondern sich senkrecht zur radialen Richtung bewegt, also zumindest kurzzeitig seinen Abstand zur Erde nicht ändert. Man kann sich vorstellen, der Stern würde sich (zumindest kurzzeitig) auf einer Kreisbahn um die Erde herum bewegen.

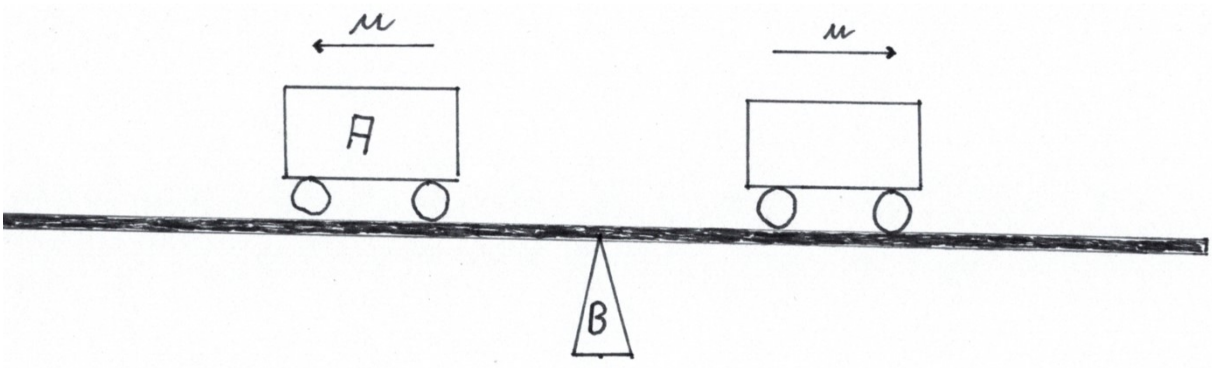
   In diesem Fall gibt es keinen physikalischen Grund für das Zustandekommen eines Doppler-Effektes. Allerdings tritt trotzdem eine Frequenzverschiebung auf. Ursache dafür ist allerdings, dass sich der Stern mit sehr großer Geschwindigkeit bewegt und deshalb die Zeit in diesem Sternsystem anders verläuft als bei uns auf der Erde. Auf Grund der Zeitdilatation ergibt sich damit auch eine Frequenzverschiebung für alle von diesem Stern ausgesandten Spektrallinien.

2. Nimm an, ein bzgl. unserer Erde ruhender Stern würde um seine eigene Achse schnell rotieren. Außerdem soll diese Achse senkrecht zur Strecke Erde-Stern stehen. Dann würde sich eine Hälfte (der Frontansicht) des Sterns auf uns zubewegen und die andere Hälfte würde sich von uns wegbewegen. Für die erstere Hälfte gäbe es eine Blauverschiebung der Spektrallinien (deren Betrag linear von der Sternenmitte nach außen hin zunimmt), für die zweite Hälfte gäbe es eine Rotverschiebung.
   Insgesamt würde jede einzelne gemessene Spektrallinie breiter erscheinen. Dieser Effekt tritt auch dann auf, wenn die Rotationsachse eine andere Lage haben sollte.

3. Das Gravitationsfeld eines Sternes hat Einfluss auf den Zeitverlauf. Wenn eine Lichtwelle auf der Sternenoberfläche erzeugt wird, so verringert sich die Frequenz diese Lichtwelle auf ihrem Weg nach außen.

4. Kosmologische Rotverschiebung. Es scheint zur Zeit so, als würde sich unser Raum ausdehnen. Durchquert eine Lichtwelle für eine längere Zeit diesen sich ausdehnenden Raum, so dehnt sich auch die Wellenlänge des Lichtes aus.

<u>**IX. Die relativistische Massenformel**</u>



Wir stellen uns vor, dass zwei identische Körper sich auf einer Balkenwaage nach außen bewegen. Beide Körper bewegen sich mit der Geschwindigkeit u im Ruhesystem B der Balkenwaage. Die Waage bleibt dabei im Gleichgewicht. Der Körper A bewege sich nach links. Der Start der beiden Körper in der Mitte der Waage soll zur A-Zeit $t_A = 0$ erfolgt sein. Die Relativgeschwindigkeit zwischen dem rechten Körper und der Balkenwaage B werde mit v bezeichnet.

Aus der Sicht des Körpers A geschieht Folgendes: Das System (und damit der Mittelpunkt) der Balkenwaage bewegt sich mit der Geschwindigkeit u nach rechts. Auf der anderen Seite des Mittelpunktes der Waage bewegt sich ein Körper mit (im System A) der Geschwindigkeit v nach rechts.
Wenn die beteiligten Geschwindigkeiten sehr groß sind, müssen wir die relativistische Geschwindigkeitsaddition anwenden, um die Relativgeschwindigkeit v zu berechnen. Sicherlich wird $v < 2u$ sein.
Der Hebelarm auf der rechten Seite ist also nicht so groß wie der Hebelarm auf der linken Seite. Damit die Waage trotzdem im Gleichgewicht bleibt, muss die Masse des rechten Körpers größer sein als die (Ruhe-)Masse des linken Körpers A. Hieraus folgt sofort die äußerst interessante Aussage:

Die Masse eines Körpers hängt von seiner Geschwindigkeit v ab.

Wir werden nun im Folgenden die Masse $m = m(v)$ berechnen:

Für den Beobachter A stellt sich der Sachverhalt nach einer gewissen Zeit t_A folgendermaßen dar:

	A	K_{rechts}
Geschwindigkeit	0	v
Masse	m_0	m_v
Hebelarm	$u \cdot t_A$	$v \cdot t_A - u \cdot t_A$

Beide Beobachter sind Beobachter in einem Inertialsystem. Für beide gilt somit nach dem allgemeinen Relativitätsprinzip das Hebelgesetz. Für den Beobachter A ergibt sich mit den Werten der Tabelle das Hebelgesetz wie folgt:

(I) $m_0 \cdot g \cdot u \cdot t_A = m_v \cdot g \cdot (v \cdot t_A - u \cdot t_A)$

Für die Geschwindigkeit v des rechten Körpers darf Beobachter A natürlich nicht einfach 2u einsetzen, sondern er muss die Relativgeschwindigkeit v relativistisch ermitteln addieren und erhält so als zweite Gleichung:

(II): $v = \frac{u+u}{1+\frac{u \cdot u}{c^2}} = \frac{2uc^2}{c^2+u^2}$

Aus diesen beiden Gleichungen werden wir nun m = m(v) herleiten:

Aus Gleichung I folgt $m_0 \cdot u = m_v \cdot (v - u)$

$m_0 = m_v \cdot (v - u)/u$ (I')

Aus Gleichung II folgt $v(c^2 + u^2) = 2uc^2$

$vc^2 + vu^2 = 2uc^2$

$vc^2 - 2uc^2 = - vu^2$

$v^2c^2 - 2uvc^2 = - v^2u^2$

$v^2c^2 - 2uvc^2 + u^2c^2 = u^2c^2 - v^2u^2$

$(v - u)^2c^2 = u^2 \cdot (c^2 - v^2)$

$(v - u)^2/u^2 = (c^2 - v^2)/c^2$

$\frac{v-u}{u} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ (II')

Setzt man II' in I' ein, so erhält man $m_0 = m_v \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ und schließlich

$$\boldsymbol{m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Folgerungen:

Je mehr sich die Geschwindigkeit v eines Körpers der Lichtgeschwindigkeit nähert, desto größer wird seine Masse. Genauer: wenn $v \to c$ dann $m \to \infty$.

Etwas mathematisch ungenau aber sinngemäß richtig ist folgende Aussage: Wenn man eine Masse m auf die Geschwindigkeit v bringen will, so benötigt man die (kinetische) Energie $0{,}5mv^2$. Das sollte man berücksichtigen, wenn man versucht, ein Raumschiff auf annähernd Lichtgeschwindigkeit zu bringen. Die Masse des Raumschiffes (und die damit benötigte Energie) wird dabei unendlich groß. Ein Raumschiff kann schon allein aus Energiegründen niemals Lichtgeschwindigkeit erreichen.

Ein Körper, der eine Masse besitzt, kann niemals Lichtgeschwindigkeit erreichen!

Es ist aber bereits gelungen, Elektronen bis auf 99,999% der Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen.

Jedes Teilchen, das sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, hätte nach der obigen Formel eine unendlich große Masse; es sei denn, seine Ruhemasse wäre 0. Daraus folgt, dass **Photonen die Ruhemasse 0 haben.**

Bei vielen Kernreaktionen (insbesondere in unserer Sonne und in allen Sternen) entstehen sog. Neutrinos. Dies sind Elementarteilchen, deren Geschwindigkeit ziemlich genau der Lichtgeschwindigkeit entspricht. Lange Zeit hat man sehr intensiv untersucht, ob ihre Geschwindigkeit vielleicht doch etwas kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist oder nicht. Seit relativ kurzer Zeit weiß man, dass Neutrinos eine äußerst kleine Ruhemasse haben. Da es in unserem Weltall außerordentlich viele Neutrinos gibt, sieht es so aus, als ob die jetzige Expansion unseres Universums in „absehbarer Zeit" rückgängig gemacht würde (aufgrund der Gravitation). Unser Universum würde sich dann irgendwann wieder zusammenziehen.

Die Einsteinsche Relativitätstheorie zeigt, dass es unmöglich ist, eine normale Masse bis auf Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen. Sie sagt jedoch nichts darüber aus, ob es eventuell Massen gibt, die bereits eine höhere Geschwindigkeit als c besitzen.
Derartige hypothetische Körper nennt man ***Tachionen***. Diese Tachionen hätten dann nach obiger Formel in unserem Erdsystem eine imaginäre Masse.

Tachionen, falls sie existieren, können keinerlei Wechselwirkung mit den uns bekannten Massen haben (d.h. sie können in keinerlei Weise irgendwie mit den uns bekannten Körpern reagieren). Nach der obigen Einsteinschen Massenformel würde man auch unendlich viel Energie benötigen, um ein Tachion auf Lichtgeschwindigkeit oder noch langsamer abzubremsen. Oder anders herum: es würde unendlich viel Energie frei werden, wenn ein Tachion auf Lichtgeschwindigkeit abgebremst würde.

Die Aussage, dass Körper keine Überlichtgeschwindigkeit erreichen können, bedeutet jedoch nicht, dass es keine Überlichtgeschwindigkeit gibt.
Leuchten wir z.B. mit einem Laserstrahl auf den Mond, so wird dort ein Lichtfleck zu beobachten sein. Wird der Laser gedreht, so wandert der Lichtfleck (gut 1 Sekunde später) über die Mondoberfläche. Bei einer Drehwinkelgeschwindigkeit von nur 90° pro Sekunde, huscht der Lichtfleck bereits mit doppelter Lichtgeschwindigkeit über die Mondoberfläche (nachrechnen!).

Allerdings gilt:
Signale (mit Informationsgehalt) können keine Überlichtgeschwindigkeit erreichen. Mache dir das an obigem Beispiel klar!

Aufgaben

1. Bis zu welcher Geschwindigkeit muss ein Elektron beschleunigt werden, damit seine Masse der doppelten Ruhemasse entspricht. Was lässt sich bei dieser Aufgabe über beliebige Körper sagen?

2. Um wie viel Prozent nimmt die Masse eines PKW zu, wenn er, anstatt zu stehen, mit 100 $\frac{km}{h}$ fährt? Benutze die Näherungsformeln für kleine x :
$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$

Lösungen

Aufgabe 1

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$2m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{v^2}{c^2}$$

$$v = c \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}866c$$

Dieses Ergebnis gilt offensichtlich für beliebige Massen.

Aufgabe 2

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{100}{3\cdot 10^5\cdot 3600}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-8{,}57\cdot 10^{-15}}} \approx \frac{m_0}{1-\frac{1}{2}\cdot 8{,}57\cdot 10^{-15}}$$

$$\frac{m_v}{m_0} = \frac{1}{1-4{,}285\cdot 10^{-15}} \approx 1 + 4{,}285 \cdot 10^{-15}$$

Die Massenzunahme beträgt also etwa $4{,}3\cdot 10^{-13}$ Prozent.

X. Äquivalenz von Masse und Energie

Im Folgenden leiten wir eine Beziehung zwischen der Masse eines Körpers und seiner Energie (welche Form von Energie, wird sich gleich zeigen) her:
Ein Körper habe in seinem Ruhesystem die Masse m_0. Er wird nun im Laborsystem aus dem Stand heraus ($v_{Anfang} = 0$) beschleunigt, bis er die Endgeschwindigkeit v besitzt. Dazu benötigt man in nichtrelativistischer Rechnung (weil man dabei davon ausgeht, dass sich die Masse des Körpers nicht ändert) bekanntlich die Beschleunigungsarbeit $0{,}5\ m_0v^2$. Diesen Betrag besitzt der Körper anschließend als kinetische Energie E_{kin}.

In Wirklichkeit ändert sich jedoch die Masse des Körpers von m_0 auf m_v. Das heißt, die Beschleunigungsarbeit ist größer als $0{,}5\ m_0v^2$, weil die Masse während der Beschleunigungsphase wächst, so dass man zur Beschleunigung eine größere Kraft benötigt. Allerdings ist die Beschleunigungsarbeit insgesamt aber auch kleiner als $0{,}5\ m_vv^2$, weil die Körpermasse nicht während der gesamten Beschleunigungsphase gleich m_v war.

Die exakte Formel soll uns zunächst nicht interessieren. Wir gehen im Folgenden davon aus, dass die Endgeschwindigkeit nicht allzu groß sein soll, so dass die kinetische Energie ziemlich genau bzw. nur unwesentlich größer als $0{,}5\ m_0v^2$ sein soll.

Aufgrund seiner Geschwindigkeit besitzt der Körper im Laborsystem nach der Beschleunigung eine größere Masse m. Berechnen wir nun die Massendifferenz:

$$m_v - m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Entwickeln wir nun die Wurzel gemäß $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}$

$$m_v - m_0 \approx m_0 \cdot \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1 \right) \quad \text{für} \quad v << c$$

$$= \frac{1}{2} m_0 v^2 \cdot \frac{1}{c^2}$$

$$\approx \frac{E_{kin}}{c^2}$$

Dieses Ergebnis bedeutet: **Führt man einem Körper die Energie ΔE zu, so erhöht sich seine Masse um** $\boldsymbol{\Delta m \approx \frac{\Delta E}{c^2}}$.

Wir haben diesen Zusammenhang hier nur für kleine Geschwindigkeiten hergeleitet. (Für größere Geschwindigkeiten ändert sich schon während der Beschleunigung die Masse deutlich, und die Formel für die kinetische Energie ist nicht mehr so einfach). Dieser Zusammenhang gilt jedoch allgemein und zwar nicht nur näherungsweise, sondern sogar exakt: $\mathbf{\Delta E = \Delta m \cdot c^2}$
Der Beweis dieser von Einstein entdeckten Formel wäre allerdings für die Schule zu schwierig.

Mittlerweile sind schon seit längerer Zeit Experimente bekannt, in denen aus reiner Energie vorher nicht vorhandene Massen geschaffen werden (z.B. treffen zwei Photonen aufeinander, vernichten sich gegenseitig und dabei entstehen ein Elektron und ein Positron). Auch das Umgekehrte gibt es: Zwei Massen (z.B. Elektron und Positron) vernichten sich gegenseitig und dabei entsteht Energie in Form von Licht.

Wenn sich zwei H-Atome zu einem H_2-Molekül verbinden, so tun sie das, weil die Gesamtenergie aller beteiligten Teilchen dadurch kleiner wird. Interessanterweise ist die Masse eines H_2-Moleküls kleiner als die doppelte Masse eines H-Atoms. Die Differenz liegt in der sog. *Bindungsenergie* des H_2-Moleküls. Diese Bindungsenergie muss man aufbringen, um das H_2-Molekül in seine beiden Bestandteile (zwei H-Atome) zu spalten.

Analoges gilt auch für alle anderen Moleküle und sogar für größere Atome, die aus kleineren Atomen zusammen gebaut sind.

Insgesamt gilt folgende Äquivalenz:

$$\mathbf{E = m \cdot c^2}$$

Heizen wir einen Körper auf, so führen wir ihm Energie zu, ohne ihn als Ganzes schneller zu machen. Aber seine Atome bewegen sich im Mittel schneller. Ihre relativistische Masse wächst. Dies äußert sich in einer Vergrößerung der Ruhemasse des Gesamtkörpers.

Allerdings ist dieser Effekt normalerweise kaum messbar. Wenn man eine Flasche Milch von 20°C auf 90°C erhitzt, so lässt sich die Massenzunahme mit einer normalen Haushaltswaage überhaupt nicht nachweisen.

Aufgabe:
Bestimme die Geschwindigkeit eines Elektrons (Ruhemasse $m_o = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; Ladung e = -1,6021773 $\cdot 10^{-19}$C), das eine Beschleunigungsspannung von 800 kV durchlaufen hat.
a) nach klassischer Rechnung.
b) nach relativistischer Rechnung. Berechne zusätzlich die Masse des Elektrons und vergleiche sie mit seiner Ruhemasse!

Lösung:
a) aus $0{,}5mv^2 = e \cdot U$ folgt sofort: $v \approx 5{,}3 \cdot 10^8$m/s $> c$

b) Durchläuft ein Elektron die Spannung 800 kV, so erhält es die zusätzliche kinetische Energie 800 keV. Seine Gesamtenergie beträgt demnach

$$m_v \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + E_{kin}$$

$$m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 =$$

$$\frac{m_0 \cdot c^2}{m_0 \cdot c^2 + E_{kin}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left[\frac{m_0 \cdot c^2}{m_0 \cdot c^2 + E_{kin}}\right]^2$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left[\frac{m_0 \cdot c^2}{m_0 \cdot c^2 + E_{kin}}\right]^2}$$

$$= \sqrt{1 - \left[\frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2 + 800 \cdot 1000 \cdot 1{,}6021773 \cdot 10^{-19}\text{C} \cdot 1\text{V}}\right]^2}$$

$$\approx 0{,}92$$

Also $v \approx 0{,}92c \approx 276\,000 \frac{km}{s}$

$$m_v = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-0{,}92^2}} \approx m_0 \cdot 2{,}55$$

Bei allen Experimenten, in denen Energievorgänge zu beachten sind, muss man streng genommen die Einsteinsche Formel mitberücksichtigen. Beispiel: Bei der Reaktion $H + H \rightarrow H_2$ wird Energie frei (auch umgekehrt: um ein H_2-Molekül in seine Bestandteile zu zerlegen, muss man Energie aufbringen). Das führt dazu, dass ein H_2-Molekül eine kleinere Masse besitzt als zwei H-Atome zusammen. Allerdings ist dieser Massendefekt bei allen **chemischen** Reaktionen so gering, dass er praktisch keine Rolle spielt. Die Chemiker sprechen sogar von einem *„Gesetz von der Erhaltung der Masse"*.

Aufgabe:
Wenn sich ein freies Proton ($m_P = 1{,}6726215 \cdot 10^{-27}$ kg) mit einem freien Elektron ($m_e = 9{,}109381 \cdot 10^{-31}$ kg) zu einem Wasserstoffatom verbindet, so beträgt die Bindungsenergie 13,6 eV. Die Masse eines Wasserstoffatoms ist um diesen entsprechenden, äquivalenten Massenbetrag geringer als die Summe der Protonen- und Elektronenmasse. Berechne die Masse eines Wasserstoffatoms und vergleiche sie mit der Summe von Protonen- und Elektronenmasse! Berechne die prozentuale Abweichung!

Lösung:

1 eV = (Ladung eines Elektrons) · 1V=Elementarladung · 1V
= $1{,}602176487 \cdot 10^{-19}$C· 1V
= $1{,}602176487 \cdot 10^{-19}$J

13,6 eV = $2{,}082829433 \cdot 10^{-18}$ J

Das entspricht einer Masse $\Delta m = \frac{2{,}082829433 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}}{c^2} = 2{,}314254926 \cdot 10^{-35} kg$

$m_P + m_e = 1{,}673532438 \cdot 10^{-27}$ kg

$m_P + m_e - \Delta m = 1{,}673532415 \cdot 10^{-27}$ kg

prozentuale Abweichung: $-1{,}38 \cdot 10^{-6}$ %

Ergebnis: **Die Bindungsenergie von Elektronen in Atomen spielt für den Massendefekt keine allzu große Rolle.**

Äußerst wichtig allerdings wird dieser Massendefekt bei Kernreaktionen. Die Masse eines Heliumkernes ist z.B. deutlich geringer als die Gesamtmasse von zwei Protonen und zwei Neutronen. In der Wasserstoffbombe werden Deuterium und Tritium (Isotope des Wasserstoffs) zu Helium verschmolzen (ein freies Neutron entsteht), wobei riesige Energie frei wird:

$^{2}H + {}^{3}H \rightarrow {}^{4}He + n + \text{Energie}$

	Kernmasse in u
Neutron	1,0086650
Deuterium	2,0135532
Tritium	3,0155007
Helium	4,0015061

Die atomare Masseneinheit beträgt $1u = 1{,}6605519 \cdot 10^{-27}$ kg
Wir werden gleich die bei obiger Reaktion frei werdende Energie berechnen.

Zur Geschichte der atomaren Masseneinheit:
Zunächst definierte man die atomare Masseneinheit als die Masse eines Wasserstoff-Atoms, allerdings als dimensionslose Zahl 1. Alle anderen Elemente hatten demnach, wie es anfangs schien, ein ganzzahliges Vielfaches dieses Wertes als Masse. Allerdings stellte man später fest, dass dieses ganzzahlige Vielfache doch immer nur ein Näherungswert war. Dafür gibt es mehrere Gründe:

- Neutronen und Protonen haben unterschiedliche Masse. Deshalb hat ein Helium-Atom nicht die vierfache Masse eines Wasserstoff-Atoms. Außerdem besitzt ein Helium-Atom nur zwei Elektronen und nicht vier.
- Jedes Element kommt in unterschiedlichen Isotopen vor, d.h. die Anzahl der Neutronen im Kern kann durch aus **etwas** variieren.
- Wenn sich zwei relativ kleine Kerne zu einem größeren Kern verbinden, so wird Bindungsenergie frei und die Gesamtmasse des neuen größeren Kerns ist kleiner als die Summe der Massen der beiden einzelnen Kerne. (Dies gilt allerdings nur, wenn alle beteiligten Kerne kleiner als ein Eisenkern sind).

Aufgrund dieser Argumente hatten die atomaren Massen aller Elemente (mit Ausnahme des Wasserstoff-Atoms) ziemliche krumme Werte.
Später (1961) einigte man sich auf folgende Definition:

1 u entspricht $\frac{1}{12}$ der Masse eines isolierten Atoms des Isotops ^{12}C

Allerdings sind die Massenzahlen aller Elemente deswegen auch nicht ganzzahlig. Nur das Isotop ^{12}C besitzt die ganzzahlige Masse 12u.

Die atomare Masseneinheit beträgt $1u = 1{,}6605519 \cdot 10^{-27}$ kg

Aufgabe:
Berechne die bei der Reaktion $^{2}H + ^{3}H \rightarrow ^{4}He + n$ + Energie frei werdende Energie in MeV und in J !
Angenommen, das emittierte Neutron erhält diese gesamte frei werdende Energie. Welche Geschwindigkeit bekommt es dann? Rechne klassisch, d.h. die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit soll vernachlässigt werden! Beurteile, ob diese Näherung sinnvoll ist!

Lösung:
$^{2}H + ^{3}H \rightarrow ^{4}He + n$ + Energie
Berechne den Massendefekt:
$\Delta m = 2{,}0135532u + 3{,}0155007u - 4{,}0015061u - 1{,}0086650u$
$= 0{,}0188828u$
Energie $= 0{,}0188828 \cdot 1{,}6605519 \cdot 10^{-27}$ kg $\cdot (3 \cdot 10^{8}$ m/s$)^{2}$
$= 2{,}822 \cdot 10^{-12}$J

Umrechnung Joule in MeV:
1 eV=(Ladung eines Elektrons) · 1V=Elementarladung · 1V = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$C· 1V
$= 1{,}602 \cdot 10^{-19}$J
1 MeV = $1{,}602 \cdot 10^{-13}$J
Damit folgt: $2{,}822 \cdot 10^{-12}$J = 17,62 MeV

$$\frac{1}{2} m_N v^2 = 2{,}822 \cdot 10^{-12}\mathrm{J}$$
$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{2{,}822 \cdot 10^{-12} J}{1{,}0086650 \cdot 1{,}6605519 \cdot 10^{-27}\mathrm{kg}}} \approx 58\,049\ \frac{km}{s}$$

Paarbildung: Ein Photon mit genügend hoher Energie kann sich in ein Elektron-Positron-Paar umwandeln. Das heißt, das Photon verschwindet und stattdessen existieren plötzlich ein Elektron und ein Positron. Dieser Vorgang kann (aus Impulserhaltungsgründen) nur innerhalb von Materie stattfinden. Berechne die Energie (in MeV), Frequenz und Wellenlänge, die ein derartiges Photon haben muss. (Elektronenruhemasse: $m_e = 9{,}1095 \cdot 10^{-31}$ kg). Bei energiereicheren Photonen erhalten das Elektron und Positron zusätzliche kinetische Energie.

Lösung:

$hf = (m_e + m_{Positron}) \cdot c^2$ wobei $h = 6{,}6218 \cdot 10^{-34}$Js
$= 2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\text{m/s})^2$
$= 1{,}64 \cdot 10^{-13}$J
$= 1{,}024$ MeV
$f = 2{,}477 \cdot 10^{20}$Hz

Mit $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$ folgt $\lambda \approx 1{,}211 \cdot 10^{-12}\text{m} = 1{,}211\text{pm}$

Das Umgekehrte ist ebenfalls möglich: Wenn ein Elektron und ein Positron aufeinander treffen, vernichten sie sich gegenseitig und es entstehen zwei in entgegengesetzter Richtung (Impulserhaltung) auseinanderfliegende Photonen gleicher Energie (jeweils 0,51 MeV).

Allgemeine Relativitätstheorie

In den letzten Jahrzenten haben immer wieder Menschen in einem Raumlabor die Erde umkreist oder sind sogar bis zum Mond geflogen. Eines ihrer Hauptprobleme ist immer die Schwerelosigkeit. Man kann sich leicht vorstellen, dass es biologische und medizinische Probleme gibt, wenn es überhaupt keine Schwerkraft mehr gibt. Wenn Raumfahrer mehrere Wochen in der Schwerelosigkeit verbracht haben, wären ohne permanentes Training in der Raumkapsel anschließend nach der Landung auf der Erde z.B. ihre Muskeln nicht mehr in der Lage, den Körper aufrecht zu halten.

Eine Lösung für dieses Problem wäre, dafür zu sorgen, dass z.B. das Raumschiff dauernd mit etwa $9{,}81\frac{m}{s^2}$ beschleunigt (oder bremst). Dann würden sich alle Gegenstände (und Menschen) physikalisch genauso verhalten wie auf der Erde. Allerdings benötigt man dafür natürlich sehr viel Energie (Beschleunigungsarbeit). Wegen Energiemangels könnte man das Raumschiff nicht allzu lange beschleunigen. Man bedenke, dass heutige (2021) Astronauten durchaus schon 200 Tage und länger im All verbringen.

Eine alternative Lösung wären große Raumschiffe, welche um ihre eigene Achse rotieren, sodass die Zentripetalkraft eine Gravitation vortäuscht (genügend stark allerdings nur auf dem „äußeren Fußboden“ des Raumschiffes).

Ähnliche Gedanken machte sich bereits Albert Einstein im Jahre 1908.

Gegeben sei ein Zimmer im freien Weltraum. Dieses Zimmer werde mit $a = 9.81\,\frac{m}{s^2} = g$ nach oben beschleunigt.

Einstein behauptet nun:
Falls dieses Zimmer keine Fenster haben sollte, so kann niemand innerhalb des Zimmers unterscheiden, ob dieses Zimmer sich ruhend auf der Erde befindet oder sich (mit $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$) beschleunigt durch den Weltraum bewegt.

Gegeben sei nun ein sich im freien Weltraum befindendes, **zunächst ruhendes** Zimmer von etwa 3m Höhe und beliebiger Breite. An der linken Wand sei eine Lichtquelle in 2m Höhe im Punkt A angebracht, welche einen Lichtstrahl zur gegenüberliegenden Wand sendet.
Natürlich kommt dieser Lichtstrahl an der gegenüberliegenden Wand in genau derselben Höhe (2m) im Punkt B an.

Nun bewege sich das Zimmer **mit konstanter Geschwindigkeit v** nach oben. Der Lichtstrahl wird vom Punkt A ausgesandt und kommt exakt im Punkt B an. Zwar bewegt sich das Zimmer während des Fluges des Photons nach oben, aber das Photon hatte dieselbe Geschwindigkeitskomponente nach oben wie das Zimmer. Deshalb trifft es auch genau den Punkt B an der gegenüberliegenden Wand.

Nun bewege sich das Zimmer **<u>beschleunigt</u>** nach oben. Der Lichtstrahl, der vom Punkt A ausgesandt wird, trifft nun unterhalb des Punktes B auf die gegenüberliegende Wand.

Erklärung: Zu dem Zeitpunkt, zu welchem der Lichtstrahl ausgesandt wird, besitzt er eine bestimmte Geschwindigkeitskomponente nach oben. Während der Lichtstrahl unterwegs ist, wird das Zimmer jedoch (nach oben) immer schneller. Das heißt, dass der (vorher) direkt gegenüberliegende Punkt B sich weiter nach oben bewegt. Der Lichtstrahl kommt also unterhalb des Punktes B an.

Kommen wir nun zurück zu der Behauptung, dass sich ein Zimmer, welches sich mit 9,81 $\frac{m}{s^2}$ beschleunigt durch den Weltraum bewegt, durch nichts von einem irdischen Zimmer unterscheidet. Die einzig logische Schlussfolgerung ist nun, dass sich ein Lichtstrahl **<u>auch auf der Erde nicht</u> „gerade“** bewegt, sondern **gekrümmt**.

Diese Abweichung von einer geraden Bahn ist nun offensichtlich umso stärker, je breiter das Zimmer und je größer die Beschleunigung bzw. die Erdbeschleunigung ist.

<u>Folgerungen:</u>
Wenn wir von der Erde aus Sterne oder Planeten beobachten, welche rein optisch in der Nähe unserer Sonne stehen, so scheinen sie an einer falschen Stelle zu stehen.

Je größer die Masse unserer Sonne wäre, desto größer wäre die Lichtablenkung.

<u>Bemerkungen:</u>
Es gibt massereiche Sterne, welche das Licht ihrer Umgebung extrem stark ablenken.

Es gibt derart massereiche Sterne (sog. schwarze Löcher), welche selbst das eigene Licht so stark krümmen, dass es das schwarze Loch nicht mehr verlassen kann.

Aufgabe: Berechne, wie stark ein Lichtstrahl auf der Erde gekrümmt wird!
Angenommen, das Zimmer sei 5m breit und in einer Höhe von 2m wird ein Lichtstrahl waagerecht ausgesandt. In welcher Höhe kommt er an der gegenüberliegenden Wand an bzw. wie groß ist die Höhendifferenz?

Lösung:
Betrachte ein Zimmer, das sich im All mit $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ „nach oben" bewegt.
Das Licht benötigt $t = \frac{5m}{3\cdot 10^8 \frac{m}{s}} = \frac{5}{3}\cdot 10^{-8}s$ bis zur gegenüberliegenden Wand.
In dieser Zeit bewegt sich das Zimmer um die Strecke
$s = \frac{1}{2}gt^2 = 0{,}5\cdot 9{,}81\cdot(\frac{5}{3}\cdot 10^{-8})^2 m = 1{,}36\cdot 10^{-15}m$
Das entspricht zufälligerweise ziemlich genau dem Radius eines Protons oder Neutrons (wenn man sich diese als Kugel vorstellt).

Die Krümmung des Raumes

Gegeben seien irgendwo im Weltraum zwei Punkte A und B. Wie kann man feststellen, wo die gerade Verbindungslinie zwischen ihnen verläuft?

Dieses Problem lässt sich z.B. nicht mit einer geraden Eisenstange lösen. Erstens kann es sein, dass die beiden Punkte sehr weit auseinander liegen und zweitens, woher weiß man, ob die Eisenstange gerade ist?
Es ist naheliegend, dass man die gerade Verbindungslinie mit einem Lichtstrahl markiert. Derjenige Lichtstrahl, der im Vakuum von A direkt nach B verläuft, bestimmt die gerade Verbindungslinie.
Problematisch ist allerdings dabei, dass Lichtstrahlen im Gravitationsfeld gekrümmt verlaufen. Und in sehr starken Gravitationsfeldern ist diese Krümmung eben auch besonders stark.

Man könnte aber trotzdem definieren:
Lichtstrahlen bewegen sich grundsätzlich geradeaus!

Die zwingende Schlussfolgerung wäre dann aber, dass unser dreidimensionaler Raum gekrümmt sein müsste. In der Nähe von massereichen Sternen wäre die Raumkrümmung dann besonders stark.

Zunächst scheint es völlig belanglos zu sein, ob der Raum gekrümmt ist und das Licht geradeaus fliegt, oder ob der Raum gerade ist und das Licht sich auf gekrümmten Bahnen bewegt. Folgende Beobachtung spricht jedoch für die Krümmung des Raumes:

Nur für weit entfernte Galaxien gilt: Je weiter eine solche Galaxie von der Erde entfernt ist, desto schneller bewegt sie sich von der Erde weg! Und diese Beobachtung gilt für alle weit entfernten Galaxien, egal in welcher Himmelsrichtung sie sich befinden. Noch vor 500 Jahren wäre diese Beobachtung ein grandioses Argument dafür gewesen, dass sich die Erde im Mittelpunkt des Weltalls befindet. Aber heute will niemand mehr so recht daran glauben.

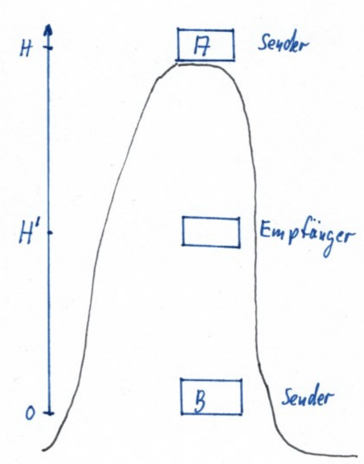
Als Erklärung für diese Beobachtung betrachte man folgende zwei unterschiedliche Beispiele.

Beispiel 1:
Auf einem Luftballon befinden sich zweidimensionale Lebewesen über die gesamte Oberfläche verteilt. Diese Wesen kennen nur ihre zweidimensionale Welt. Nun werde der Luftballon langsam aufgeblasen. Jedes Lebewesen, welches auf der Luftballonoberfläche still steht oder sich nur sehr langsam bewegt, registriert nun, dass sich alle anderen Lebewesen von ihm entfernen, und zwar umso schneller, je weiter sie von ihm entfernt sind. Diese Lebewesen können sogar feststellen, dass sich der (zweidimensionale) „Raum" zwischen ihnen ständig vergrößert bzw. weiter ausdehnt. Sie selbst können sich innerhalb ihres Raumes überall hin bewegen. Sie können ihren Raum aber nicht verlassen. Sie wissen auch nicht, was sich „hinter" ihrem Raum befindet bzw. wohinein sich ihr Raum ausdehnt. Die zweidimensionalen Lebewesen können sich dies alles natürlich nicht erklären. Dabei ist die Erklärung sehr einfach. Die gekrümmte zweidimensionale Luftballonoberfläche bewegt sich in den dreidimensionalen Raum hinein.
Dabei kann es vorkommen, dass sich nahestehende Lebewesen durchaus aufeinander zubewegen können. In dem Falle wäre ihre Eigenbewegung stärker als die Ausdehnung des Zwischenraumes.

Übrigens: Die uns relativ nahe liegende Andromeda-Galaxis bewegt sich auf unsere Milchstraße zu. Aufgrund der Gravitationsanziehung zwischen diesen beiden Galaxien, bewegen sie sich schneller aufeinander zu als der Raum zwischen ihnen expandieren kann.

Beispiel 2:
In einem Hefeteig sollen sich viele Rosinen befinden. Der ganze Teig wird im Backofen erhitzt. Während der dreidimensionale Teig sich ausdehnt, entfernen sich auch alle Rosinen voneinander.

<u>Die Zeit im Gravitationsfeld</u>



Wir betrachten zwei identisch gebaute Sender A und B, die beide eine elektromagnetische Welle mit der Frequenz f = 1 GHz ausstrahlen. Die Periodendauer der Strahlung beträgt also T = 1 ns. Die Sender haben auch eine zusätzlich eingebaute Uhr, deren Zeitangabe immer nach jeder Periodendauer T um 1 hochgezählt wird. Für die Energie der zugehörigen Photonen gilt bekanntlich $E = h \cdot f$.

Der Sender A sei oben auf einem Berg in der Höhe H angebracht. Der Sender B befinde sich unten im Tal auf der Höhe 0. Auf halber Höhe sei ein Empfänger angebracht.

Bekanntlich werden Lichtstrahlen von Gravitationsfeldern beeinflusst (Stichwort Krümmung). Photonen, die der Sender im Tal nach oben hin ausstrahlt, benötigen dafür Energie, denn wenn sie beim Empfänger ankommen, besitzen sie eine kleinere Frequenz und damit auch weniger Energie als noch unten im Tal.
Photonen, die der Sender von oben auf dem Berg nach unten hin ausstrahlt, gewinnen dafür Energie, denn wenn sie beim Empfänger ankommen, besitzen sie eine höhere Frequenz und damit auch mehr Energie als noch oben auf dem Berg. Demnach treffen beim Empfänger zwei Radiowellen mit unterschiedlicher Frequenz ein. Die Frequenz der von oben kommenden Radiowelle ist größer als die Frequenz der von unten kommenden Welle.

Dieser Frequenzunterschied muss nun erklärt werden. Nehmen wir einmal an, dass der Sender oben auf dem Berg genau n Perioden aussendet. Dann müssen in der Bergmitte beim Empfänger auch genau n Perioden ankommen. Daran gibt es überhaupt gar keinen Zweifel! Wenn jedoch <u>pro Sekunde</u> in der Bergmitte mehr Perioden ankommen als oben auf dem Berg <u>pro Sekunde</u> ausgesandt wurden, dann kann das nur noch daran liegen, dass in der Bergmitte eine Sekunde länger dauert als eine Sekunde oben auf dem Berg.

Analoge Betrachtungen ergeben, dass unten im Tal eine Sekunde noch länger dauert als in der Bergmitte oder gar oben auf dem Berg.

Zusammengefasst folgt:
In der Höhe vergeht die Zeit schneller als im Tal.

Wir wollen nun quantitative Überlegungen anstellen, um den unterschiedlichen Verlauf der Zeit auf Berg und Tal zu berechnen. Um die Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir an, dass der Berg nicht allzu hoch ist, dass also die Erdbeschleunigung $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$ konstant sei.

Den Radio-Photonen kann man gemäß $E = mc^2$ eine Masse zuordnen: $m = \frac{E}{c^2}$.

Wenn die Photonen aus dem Tal beim Empfänger ankommen, so besitzen sie nun die Lageenergie m·g·H' und entsprechend **weniger** Photonenenergie.
Das Umgekehrte gilt für die Photonen, die von oben herunter kommen: sie haben nun weniger Lageenergie und entsprechend **mehr** Photonenenergie.

Der Energieunterschied ΔE zwischen den Berg-Photonen und den Tal-Photonen beträgt m·g·H (weil die Photonen oben auf dem Berg diese zusätzliche Lage-energie besitzen).

Wegen E = h·f gilt natürlich auch ΔE = h·Δf . Für den Frequenzunterschied folgt damit: $\Delta f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{m \cdot g \cdot H}{h} = \frac{\frac{h \cdot f}{c^2} \cdot g \cdot H}{h} = \frac{f \cdot g \cdot H}{c^2}$.

Dies bedeutet für die mit den Sendern gekoppelten Uhren nun: eine Uhr, deren Uhrwerk mit der Frequenz f geht, hat in der Höhe H eine um Δf höhere Frequenz.

Die Zeitanzeige t der Uhr ist natürlich proportional zu ihrer Frequenz f. Die Abweichung Δt in der Zeitanzeige ist damit auch proportional zur Frequenz-abweichung Δf . Es gilt $\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta t}{t}$

Damit folgt aus obiger Gleichung: $\Delta t = \frac{g \cdot H}{c^2} \cdot t$

Wenn am Boden die Zeit t vergangen ist, so geht eine Uhr in der Höhe H um die Zeit $\Delta t = \frac{g \cdot H}{c^2} \cdot t$ **vor im Vergleich zu einer Uhr am Boden.**

Der Verlauf der Zeit hängt also auch vom Gravitationsfeld ab. Im freien Weltall verläuft die Zeit schneller als in der näheren Umgebung von Sternen oder Planeten.
Umgekehrt formuliert: An der Oberfläche von massereichen Sternen verläuft die Zeit sehr viel langsamer als im freien Weltraum.

Man kann rechnerisch nachweisen, dass an der Oberfläche eines schwarzen Loches die Zeit still steht.

Aufgabe 1: Eine Uhr befinde sich auf Meereshöhe, eine zweite Uhr sei auf der Spitze des Montblanc (H = 4 180 m) stationiert. Berechne die Zeitdifferenz zwischen beiden Uhren, nachdem auf Meereshöhe 50 Jahre vergangen sind!

Die internationale Atomzeitskala wird als Mittelwert aus der Zeitangabe mehrerer nationaler Zeitinstitute gebildet. Alle Zeitinstitute benutzen natürlich die genauesten Atomuhren. Allerdings liegen die Institute auf unterschiedlichen Meereshöhen.

Aufgabe 2: Um welche Zeit gehen die Uhren der US Naval Observatory in Boulder (Colorado) in einem Jahr vor im Vergleich zu den Uhren der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) in Braunschweig? Boulder liegt 1650 m und Braunschweig 80 m über dem Meeresspiegel.

Aufgabe 3: Die für unser GPS-Navigationssystem zuständigen Satelliten bewegen sich in einer Höhe von etwa 20,2 km. Dort oben verläuft die Zeit natürlich schneller als auf der Erdoberfläche. Wie groß wäre die Zeitdifferenz, wenn auf der Erdoberfläche ein Tag vergeht? Wie weit käme die elektromagnetische Welle innerhalb dieser Zeitspanne, bzw. um welche Strecke würde sich das Navi-Gerät pro Tag verrechnen, wenn man den Höhenunterschied und die damit verbundene Zeitdilatation nicht schon im GPS-System rechnerisch berücksichtigen würde? Beachte, dass sich diese möglichen Fehler für jeden weiteren verlaufenen Tag addieren würden!

Bemerkung: Die obige Formel für Zeitdifferenzen wurde hergeleitet für den Fall, dass die Höhenunterschiede H so klein sind, dass sich die Gravitationsbeschleunigung g nicht merklich ändert. Deshalb konnte man bei der Berechnung der Lageenergie auch ein einziges konstantes g einsetzen. Für die Gewichtskraft gilt damit vereinfachend $G = m \cdot g$. In obige Formel können wir also nicht Höhenunterschiede H von mehreren Tausend km einsetzen.

In einem solchen Fall müsste man die Rechnung noch einmal neu durchführen mit der Gravitationskraft $F = f \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Lösungen

Aufgabe 1

$$\Delta t = \frac{g \cdot H}{c^2} \cdot t = \frac{9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 4180m}{\left(3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2} \cdot 50 \cdot 365{,}25 * 24 * 3600s \approx 718{,}9\mu s$$

Aufgabe 2

$$\Delta t = \frac{g \cdot H}{c^2} \cdot t = \frac{9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 1570m}{\left(3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2} \cdot 1 \cdot 365{,}25 * 24 * 3600s \approx 5{,}4\mu s$$

Aufgabe 3

$$\Delta t = \frac{g \cdot H}{c^2} \cdot t = \frac{9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 20200m}{\left(3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2} \cdot 24 * 3600s \approx 190{,}2ns$$

In dieser Zeit würde eine elektromagnetische Welle etwa 57,6 m zurücklegen.

Größe eines schwarzen Loches

Im Folgenden wird der Radius eines schwarzen Loches auf klassische Weise berechnet. Bemerkung: Interessanterweise kommt eine exakte relativistische Rechnung zu denselben Ergebnissen.

Ein Körper der Masse m werde von der Oberfläche eines kugelförmigen Himmelskörpers mit Radius R und Masse M senkrecht nach oben geschossen. Wenn er in der Lage sein soll, das Gravitationsfeld des Himmelskörpers zu verlassen, so muss seine Abschussgeschwindigkeit v mindestens den Wert besitzen, der durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int_R^\infty f \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}\,dr = fmM \cdot \frac{1}{R}$$

Je kleiner der Radius R ist, desto größer muss die Abschussgeschwindigkeit werden. Letztere kann jedoch höchstens gleich der Lichtgeschwindigkeit sein. Formt man obige Gleichung damit um, so folgt:

$$R_S = \frac{2f \cdot M}{c^2}$$

Dieser Wert wird *Schwarzschild-Radius* genannt.

Ist der Radius des Himmelskörpers kleiner oder gleich diesem Wert, so kann keine Masse diesen Himmelskörper verlassen. Selbst Licht kann diesem sog. Schwarzen Loch nicht entkommen.

Der Schwarzschildradius ist proportional zur Masse M des schwarzen Loches. Es kann also durchaus kleinere und größere schwarze Löcher geben. Man hat mittlerweile im Universum sehr viele schwarze Löcher mit deutlich unterschiedlich großen Massen gefunden.

Die Kugeloberfläche mit dem Schwarzschildradius wird auch als Ereignishorizont des schwarzen Loches bezeichnet. Wie sich die Masse innerhalb des Ereignishorizontes verteilt, kann nicht so wirklich beurteilt werden:

Die Masse eines superschweren Sternes zieht sich immer enger zusammen bis eben ein schwarzes Loch entsteht. Warum sollte sich also dieses schwarze Loch nicht noch weiter zusammenziehen, nur weil das Licht nicht mehr entweichen kann?
Andererseits steht die Zeit am Ereignishorizont eines schwarzen Loches still. Wie soll sich da noch etwas weiter zusammenziehen, also bewegen können, wenn die Zeit still steht?

Außerdem ist der Raum bei einem schwarzen Loch unendlich stark gekrümmt.

Die uns bekannten physikalischen Gesetze kann man in einem schwarzen Loch nicht mehr anwenden.

Man könnte noch berechnen, wie groß die Dichte ($\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3}$) mindestens sein muss, wenn der Radius kleiner ist als der Schwarzschildradius.

Setzt man die obige Formel für den Schwarzschild-Radius für die Dichte ein, so scheint diese (von mir genannte) *Mindest-Dichte* eines schwarzen Loches durchaus noch von seiner Masse abzuhängen.

Aufgaben

Im Folgenden sind die Gravitationskonstante, die Erd- und die Sonnenmasse gegeben:

$$f = 6{,}672 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}, \; M_e = 5{,}976 \cdot 10^{24} kg, \; M_s = 1{,}9891 \cdot 10^{30} kg$$

1. Wenn unsere Erde ein schwarzes Loch wäre, welchen Radius dürfte sie dann höchstens haben? Welche sog. *Mindest-Dichte* hätte sie dann? Vergleiche diesen Wert mit der Dichte der Kerne aller Elemente: $\rho_{Kern} = 2 \cdot 10^{17} \frac{kg}{m^3}$!

2. Führe dieselbe Rechnung für unsere Sonne durch!

3. Angenommen, es gäbe ein schwarzes Loch, dessen Ereignishorizont der Größe eines Wasserstoffatoms (Radius etwa $0{,}5 \cdot 10^{-10}$m) entspräche; welche Masse müsste dieses schwarze Loch besitzen? Vergleiche diesen Wert mit der Masse eines Wasserstoffatoms (etwa $1{,}67 \cdot 10^{-27}$kg)!

Lösungen

Aufgabe 1
Für die Erde folgt damit ein Schwarzschildradius von etwa 8,86mm. Die sog. *Mindest-Dichte* betrüge $2 \cdot 10^{30}\,\frac{kg}{m^3}$. Das wäre um einen Faktor 10^{13} größer als die Dichte der Atomkerne.

Aufgabe 2
Für die Sonne folgt ein Schwarzschildradius von etwa 2 949m. Die sog. *Mindest-Dichte* betrüge $1{,}85 \cdot 10^{19}\,\frac{kg}{m^3}$.

Aufgabe 3
Dieses schwarze Loch müsste eine Masse von $3{,}37 \cdot 10^{16}$ kg besitzen.